Exercice 6.1. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \dots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$.

Exercice 6.2. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
2. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

Exercice 6.3. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment ?

Exercice 6.4. Soit n un entier et soit S_n le nombre de vecteurs $(s_1, \dots, s_k) \in \{1, 2, 3\}^k$ tels que $\sum_i s_i = n$ et $k \geq 1$ entier. Par exemple, $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4$ et $S_4 = 7$.

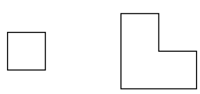
1. Trouver une récurrence pour S_n qui fait intervenir S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
2. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que S_n/θ^n converge vers un nombre réel non nul quand n tend vers l'infini. Calculer les premières décimales de θ.

Exercice 6.5. Calculer la somme

$$\sum_{u=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} .$$

(Indice : exprimer cette somme comme un coefficient d'un produit de deux polynômes).

Exercice 6.6. On considère un rectangle de taille $n \times 2$. On note R_n le nombre de pavages du rectangle par les pièces dessinées ci-dessous et orientées dans n'importe quel sens. Par convention, $R_0 = 1$.



1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+3} = R_{n+2} + 4R_{n+1} + 2R_n$ et que $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 11$.
2. Exprimer la série génératrice $S(x)$ de la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous forme d'une fraction rationnelle.
3. Donner une forme close de R_n et un équivalent asymptotique de R_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.7. Montrez que si $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels positifs, alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq (\sum_i x_i/n)^3$.

Montrer qu'il existe une constante c telle que si un graphe G avec n sommets ne contient pas $K_{3,3}$ comme sous-graphe, alors G a au plus $cn^{5/3}$ arêtes. (Indice : Utiliser la même approche que dans la preuve du théorème 6.14)