Exercice R1.1. Lorsque R est un anneau, on appelle *série formelle* et on note $R[[x]]$ l'ensemble des suites à valeurs dans R que l'on représente sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($a_n \in R$).

Soient $R_0 = \mathbb{Z}$ et, pour tout $i \geq 1$, $R_i = R_{i-1}[[x_i]]$. Pour quelles valeurs de i, l'anneau R_i est-il dénombrable ? Justifier.

Exercice R1.2. On considère l'ensemble des nombres réels $\mathcal{R}$ et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\mathcal{R})$. On définit une relation ϕ sur $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \qquad A \sim_\phi B \text{ si } (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) \text{ est dénombrable.}$$

Montrez que ϕ est une relation d'équivalence.

Exercice R1.3. Soit $(X, \leq)$ un poset et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on note $A \ll B$ la relation

$$A \ll B \quad \text{si} \quad \forall a \in A, \exists b \in B, \qquad a \leq b.$$

Montrez que quand $A \ll B$ et $B \ll A$, A et B possèdent le même ensemble d'éléments maximaux.

Exercice R1.4. On définit cinq plans de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 5z = 0\},\\
H_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},\\
H_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 4z = 0\},\\
H_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + 9z = 0\},\\
H_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 5z = 0\}.
\end{aligned}$$

Soit $P = \{\cap_{i \in I} H_i \mid I \subseteq \{1, \ldots, 5\}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P} = (P, \subseteq)$ est un treillis possédant un unique élément minimal $\{0\}$ et un unique élément maximal $\mathbb{R}^3$.
2. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathbb{P}$.
3. Calculer $\mu(\{0\}, x)$ pour tout $x \in P$.