ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Galop d'essai 11.11.2010

Composition de mathématiques discrètes

11.11.2010

- Utilisez une feuille différente pour chaque problème et numérotez les pages.
- Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille supplémentaire.
- L'usage de documents et de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve. Seul un formulaire personnel manuscript au format A4 recto-verso est toléré.
- Les résultats des questions intermédiaires peuvent être admis pour la suite de chaque problème.
- Il y a 120 points au total. Votre travail sera corrigé mais non noté.
- Vous disposez d'exactement deux heures. Bon travail.

Nom :

Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5

Total

Notations utilisées pour l'examen

1. Pour tout ensemble $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$.
2. Pour $X, Y \subseteq \mathcal{E}$, on appelle différence symétrique et on note

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Problème 1 [20 points]. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble.

1. Montrez que pour toutes parties $A, B, C, D \subseteq \mathcal{E}$, si $(B \smallsetminus C) \subseteq A$ et $(C \smallsetminus D) \subseteq A$, alors $(B \smallsetminus D) \subseteq A$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Prouver que la relation $\mathcal{R}_A$ définie sur $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ par

$$\forall B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad B\mathcal{R}_A C \text{ si } B \Delta C \subseteq A$$

est une relation d'équivalence. Pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, déterminer la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Solution :

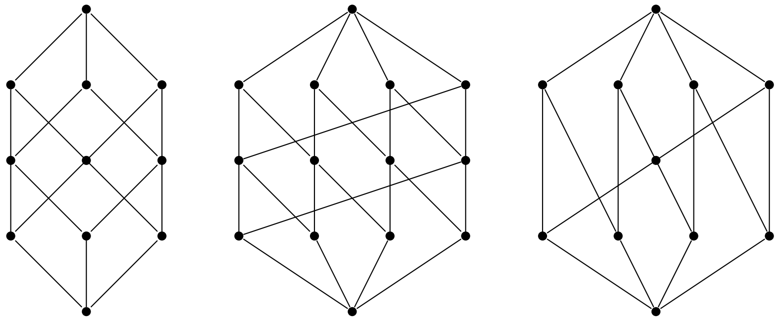
1. Soit $x \in B \smallsetminus D$, i.e. $x \in B$ et $x \notin D$. Soit $x \in C$ et alors $x \in C \smallsetminus D \subseteq A$, soit $x \notin C$ et alors $x \in B \smallsetminus C \subseteq A$. D'où le résultat.
2. Réflexivité : On a pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, $X \Delta X = \emptyset \subseteq A$.
Symétrie : On a pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, $X \Delta Y = Y \Delta X$. Donc $X\mathcal{R}_A Y$ ssi $Y \mathcal{R}_A X$.
Transitivité : Si $X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, $X\mathcal{R}_A Y$ et $Y\mathcal{R}_A Z$, alors $X \smallsetminus Y \subseteq A$ et $Y \smallsetminus Z \subseteq A$, mais alors $X \smallsetminus Z \subseteq A$. De même, $Z \smallsetminus X \subseteq A$. Ainsi, $X\mathcal{R}_A Z$.
La classe de B modulo $\mathcal{R}_A$ est l'ensemble $[B]_{\mathcal{R}_A} = \{C \mid (B \smallsetminus C) \cup (C \smallsetminus B) \subseteq A\}$. On peut vérifier que $B \smallsetminus C \subseteq A$ est équivalent à $B \smallsetminus A \subseteq C$, et que $C \smallsetminus B \subseteq A$ est équivalent à $C \subseteq A \cup B$. On aura donc

$$[B]_{\mathcal{R}_A} = \{(B \smallsetminus A) \cup D \mid D \subseteq A\}.$$

Problème 2 [12 points]. Un pré-poset est un ensemble P muni d'une relation binaire $\leq$ réflexive et transitive (mais non nécessairement antisymétrique). Étant donné un pré-poset P et $x, y \in P$, on définit la relation $\sim$ par $x \sim y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Solution :
Réfléxivité : Si $x \in P$, alors $x \leq x$ par hypothèse. Donc $x \sim x$.
Symétrie : Si $x, y \in P$ tels que $x \sim y$, alors $y \leq x$ et $x \leq y$ donc $y \sim x$.
Transitivité : Si $x, y, x \in P$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \leq y$ et $y \leq z$ mais par transitivité de $\leq$, $x \leq z$. De même, $y \leq x$ et $z \leq y$ donc $z \leq x$. Ainsi $x \sim z$.

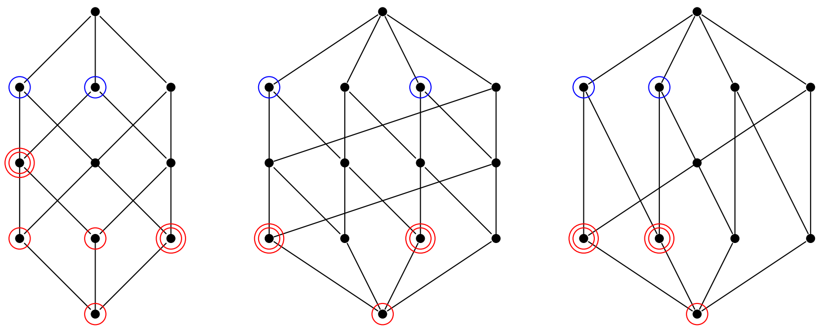
Problème 3 [15 points]. Parmi les trois posets suivants, indiquer leur largeur et entourer si possible un couple d'éléments qui ne possède pas de borne inférieure. (Justifications non demandées)



Solution :
Dans chaque cas, une coupe transversale du graphe fournit une antichaîne et il est possible de trouver une décomposition en autant de chaînes.

1. Le poset 1 est de largeur 3.
2. Le poset 2 est de largeur 4.
3. Le poset 3 est de largeur 4.

Nous entourons ci-dessous en bleu un couple et en rouge ses minorants. Nous entourons en double deux minorants maximaux non-comparables.



Problème 4 [28 points]. Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1})$ une permutation des entiers 1, 2, ..., $n^2 + 1$. Montrer que a contient une sous-suite monotone de longueur $n + 1$. On commencera par introduire un ordre adéquat sur $[1, n^2 + 1]$ tel qu'une chaîne corresponde à une suite croissante.

Solution :
On introduit l'ordre suivant sur $[1, n^2+1]$: pour tout $i, j \in [1, n^2+1]$, $i \trianglelefteq j$ si $i \leq j$ et $a_i \leq a_j$ (où $\leq$ est l'ordre usuel sur les entiers). On observe que de toute chaîne $i_1 \trianglelefteq i_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq i_k$ découle une sous-suite croissante de a. De plus, de toute antichaîne i_1, ..., i_k, où sans perte de généralité on peut supposer que $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$, on peut tirer une sous-suite décroissante. En effet, si $i \not\trianglelefteq j$ et $i \leq j$, alors $a_i \geq a_j$. Soit C_1, ..., C_ℓ une décomposition minimale de $[1, n^2 + 1]$ en chaînes. S'il existe une chaîne de longueur $n + 1$, on a trouvé une sous-suite croissante. Sinon, nécessairement $\ell > n$ i.e. $\ell \geq n + 1$. Mais d'après le théorème de Dilworth, ℓ est la longueur d'une antichaîne maximale. Dans ce cas il existe une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$.

Problème 5 [45 points]. On considère l'ensemble $\mathscr{F} = \{\epsilon, 1, 2, 11, 12, 21, 111, \ldots\}$ des mots $a = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ de longueur quelconque $n \in \mathbb{N}$ sur l'alphabet $\{1, 2\}$. La lettre ϵ désigne le mot vide. On appelle rang de a la somme des lettres de a. (Le mot vide est de rang 0). Par convention, pour $a \in \mathbb{N}$, 1^a désigne le mot $11\cdots1$ où 1 est répété a fois.

1. Pour tout $r \geq 2$, exprimer le nombre F_r de mots de rang r en fonction de F_0, F_1, …, F_{r-1}.

   On définit un graphe orienté $G = (\mathscr{F}, \mathscr{E})$ par $(a, b) \in \mathscr{E}$ si
   - (règle A) b est obtenu de a en ajoutant un 1 n'importe où à gauche du premier 1 de a (si a ne contient pas de 1, on peut rajouter un 1 n'importe où) ou si
   - (règle B) le premier 1 de a est remplacé par un 2.
2. Soit (a, b) une arête de G. Comparez les rangs de a et b. En déduire, que G est un graphe acyclique.

   On note P le poset sur $\mathscr{F}$ tiré de la clôture transitive de G.
3. Dessiner le diagramme de Hasse de P en vous restreignant aux mots de rang inférieur à 4.
4. (a) Montrer qu'un mot commençant par 1 n'a qu'un seul prédécesseur direct.

   (b) Montrer que pour tout $a, b, s \in \mathscr{F}$, on a $a \leq b$ si et seulement si $as \leq bs$ (où as est la concaténation des mots a et s).

   (c) Montrer que pour tout mot a de longueur n et tout n-upplet d'entiers $(\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{N}^n$, on a $a_1\cdots a_n \leq 2\,1^{\ell_1}2\,1^{\ell_2}\cdots2\,1^{\ell_n}$.

   (d) Montrer que b est un successeur de a si et seulement si une fois éliminé le plus long suffixe commun s à a et b, disons $a = a's$ et $b = b's$, b' contient plus de 2 que a' ne contient de lettres.
5. Soient $a, b \in P$.

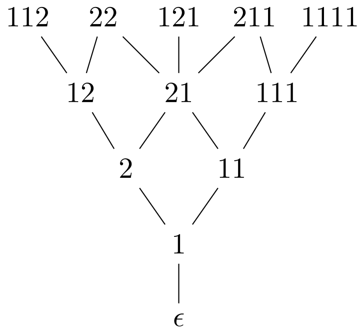
   (a) Montrer que (a, b) possède un infimum. (Lorsque a et b ne sont pas comparables, on distinguera le cas où l'un des mots commence par un 1 et celui où les deux mots commencent par un 2 et l'on raisonnera par récurrence sur la somme des rangs de a et b).

   (b) Exhibez un majorant commun àa et b. Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathscr{F}; x \leq M, x \geq a, x \geq b\}$ est fini. Montrer que (a, b) possède un supremum.

   (c) Que peut-on dire du poset P ?

Solution : Ce treillis est appelé treillis de Young–Fibonacci.

1. Un mot de rang $r \geq 2$ est commence soit par 2 et est suivi d'un mot de rang $r - 2$, soit par 1 et est suivi d'un mot de rang $r - 1$. Donc $F_{r+2} = F_r + F_{r+1}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.
2. Pour passer de a à b, soit on ajoute un 1 soit on remplace un 1 par un deux. Dans les deux cas, le rang est augmenté d'un. Le graphe ne peut ainsi contenir aucun cycle, car le rang ne pourrait être toujours croissant le long de chaque arête.
3. Le diagramme est :



4. (a) Soit $b = 1b'$ et a un prédécesseur direct de a. Alors (a, b) est une arête de $\mathscr{E}$, sinon a ne serait pas directement un prédécesseur de b. Si b résulte de a par application de la règle A, le 1 ajouté est en première position, sans quoi b commencerait par un 2. Ce cas survient toujours une fois en prenant $a = b'$. La règle B ne peut pas agir sur a, car alors la première lettre de a est identique à celle de b c-à-d 1.

   (b) Si $a \leq b$, il existe une suite de mots $m_0 = a \leq m_1 \leq \cdots \leq m_k = b$ tels que l'on passe de m_i à m_{i+1} par application d'une des règles. Mais alors les mêmes règles restent valables pour passer de $as = m_0 s \leq m_1 s \leq m_2 s \leq \cdots \leq m_k s = bs$.
   Réciproquement, supposons que les deux mots finissent par la même lettre. La règle A ne change jamais la dernière lettre, quant à la règle B appliquée à la dernière lettre elle ne peut que faire passer d'un 1 à un 2 mais elle n'est pas reversible. Donc si $a = a'\sigma \leq b'\sigma = b$ avec $\sigma = 1$ ou 2, toutes les opérations faites pour passer de a à b peuvent aussi se faire sur a' et b' et la réciproque est démontrée par récurrence.

   (c) Par application successive de gauche à droite de la règle B (au plus n fois), on a $a \leq 2^n$. Il reste à introduire des 1 aux bons endroits en appliquant la règle A en partant de la droite vers la gauche (en tout $\ell_1 + \cdots + \ell_n$ fois).

   (d) Si b est le successeur de a, il existe une suite de successeurs directs $a = m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_k = b$. La réciproque provient de l'application combinée des questions précédantes.

5. (a) On suppose que si la somme des rangs de a et b est $\leq r - 1$, alors $a \wedge b$ existe. Si a et b sont comparables, leur infimum est clairement l'un d'eux. Sinon si a commence par 1, disons, $a = 1a'$, les prédécesseurs de a distincts de a sont aussi d'après la question 4.1 les prédécesseurs de a', donc un minorant de a et b est un minorant de a' et b. Mais $a' \wedge b$ existe par hypothèse de récurrence. Ainsi $a \wedge b$ existe et vaut $a' \wedge b$. Supposons que $a = 2a'$ et $b = 2b'$ et que $m \leq a$, $m \leq b$. Compte tenu de la question 4, on peut remplacer éventuellement la première lettre de m par un deux pour former un minorant plus grand. D'autre part, toujours en utilisant la question 4, on voit qu'alors si $m = 2m'$, on a $m' \leq a$ et $m' \leq b$. Donc $a \wedge b$ existe et vaut $2a' \wedge b'$.

   (b) Soit n le maximum des longueurs de a et b. Alors $a \leq 2^n$ et $b \leq 2^n$. L'ensemble $T = \{x \in \mathscr{F}; a \leq x, b \leq x, x \leq 2^n\}$ est fini car de tels $x \in T$ est de rang borné et d'aprés la question 1, il n'y a qu'un nombre fini de mots de rang donné. Mais alors T possède un élément minimal, à savoir la borne inférieure de tous les éléments de T. Donc $a \vee b$ existe bel et bien.

   (c) Donc P est un treillis.