Exercice 1.1. Soient X et Y des ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$ une application. De plus, soient $A, B \subseteq X$ et $C, D \subseteq Y$. Montrer les assertions suivantes :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Solution 1.1.

(a) Supposons que $x \in f(A \cup B)$. Alors, il existe $y \in A \cup B$ tel que $f(y) = x$. Si $y \in A$, alors $x \in f(A)$ et si $y \in B$, alors $x \in f(B)$. Ainsi, $x \in f(A) \cup f(B)$. Réciproquement, supposons que $x \in f(A) \cup f(B)$. Si $x \in f(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x = f(y)$. De même, si $x \in f(B)$, alors il existe $y \in B$ tel que $x = f(y)$. D'où, $x \in f(A \cup B)$.

(b) Supposons que $x \in f(A \cap B)$. Alors il existe $y \in A \cap B$ tel que $x = f(y)$. D'où, $x \in f(A)$ et $x \in f(B)$, ce qui montre que $x \in f(A) \cap f(B)$.

(c) Supposons que $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Alors $f(x) =: y \in C \cup D$. Si $y \in C$, alors $f(x) \in C$, si bien que $x \in f^{-1}(C)$. De même, si $y \in D$, alors $x \in f^{-1}(D)$. D'où $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Ceci montre que $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Réciproquement, supposons que $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Si $x \in f^{-1}(C)$, alors $f(x) =: y \in C$. De même, si $x \in f^{-1}(D)$, alors $f(x) \in D$. D'où, $f(x) \in C \cup D$, de sorte que $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Ceci montre que $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$ et donc l'égalité des deux ensembles est démontrée.

(d) Soit $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Alors $f(x) =: y \in C \cap D$ et donc $y \in C$ et $y \in D$. Par conséquent, $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$ et ainsi $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Réciproquement, supposons que $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Alors $x \in f^{-1}(C)$ et $x \in f^{-1}(D)$, donc $f(x) \in C \cap D$. Il s'ensuit que $x \in f^{-1}(C \cap D)$.

Exercice 1.2. Pour un ensemble X, l'ensemble des parties de X est défini par

$$P(X) := \{A \mid A \subseteq X\} .$$

(a) Construire une application injective $f\colon X \to P(X)$.

(b) Montrer que si $g\colon X \to P(X)$, alors g n'est pas surjective. [Indication : considérer l'ensemble $A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$].

Solution 1.2.

(a) Soit $f\colon X \to P(X)$ l'application définie par $f(x) := \{x\}$. Cette application est injective. En effet, donnons-nous deux éléments x et x' tels que $f(x) = f(x')$ et montrons que $x = x'$. Par définition de f, on a $\{x\} = \{x'\}$. Comme ces deux ensembles n'ont qu'un élément, il s'ensuit que $x = x'$.

(b) Soit $g \in X \to P(X)$ une application. Pour montrer que g n'est pas surjective, il suffit de montrer que l'un des éléments de $P(X)$ n'admet pas d'antécédent. Considérons $S := \{x \mid x \notin g(x)\}$. Supposons qu'il existe $z \in X$ tel que $S = g(z)$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction. Demandons-nous si z appartient à S.

   i. Si $z \in S$, alors $z \in g(z)$, donc d'après la définition de S, $z \notin S$.

   ii. Si $z \notin S$, alors $z \notin g(z)$, donc d'après la définition de S, $z \in S$.

   Nous avons démontré que $z \in S \Leftrightarrow z \notin S$ ce qui est une contradiction.
   Noter bien que i. ou ii. tout seul n'est *pas* une contradiction, dans la mesure où l'assertion $\ll$ faux $\Rightarrow$ vrai $\gg$ est toujours $\ll$ vraie $\gg$. Seule l'équivalence de i. et ii. est une contradiction.

Exercice 1.3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble X. L'ensemble

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

est appelé la *différence symétrique de A et B*. Montrer que

(a) $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

(b) Si $A\Delta B = A^c$, alors $B = X$.

(c) $A\Delta A = \emptyset$.

(d) Si C est un sous-ensemble de X, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$, c'est-à-dire que l'opération Δ est associative.

(e) L'ensemble $P(X)$ munit de l'opération Δ est un groupe.

(f) Si X est fini alors
$$\#(A\Delta B) = \#A + \#B - 2\#(A \cap B)$$

Solution 1.3.

(a) Comme $A - B = A \cap B^c$, on peut utiliser la loi de De Morgan pour voir que

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

(b) Comme $A\Delta B = A^c$, on déduit de la partie (a) que $A \cup B \supseteq A^c$, si bien que $B \supseteq A^c$ puisque $A \cap A^c = \emptyset$. Par conséquent, $A \cup B = X$ et donc $A^c = A\Delta B = A^c \cup B^c$, d'où $B^c \subseteq A^c$, d'où $B \supseteq A$. Il en découle que $B \supseteq A \cup A^c = X$, d'où $B = X$.

(c) Suit la définition.

(d) Notons $\oplus$ l'opération logique XOR : si p et q sont des variables booléennes, alors $p \oplus q$ est vrai ssi soit seul p est vrai ou bien seul q est vrai. Alors l'assertion $x \in A\Delta B$ est équivalente à $(x \in A) \oplus (x \in B)$, par définition de Δ. Donc $x \in (A\Delta B)\Delta C$ est l'assertion « $((x \in A) \oplus (x \in B)) \oplus (x \in C)$ ». L'associativité découle de l'associativité pour les formules booléennes.

(e) $P(X)$ est clos sous l'opération Δ, puisque cette opération produit un sous-ensemble de X ; l'opération est associative d'après (d). L'élément $\emptyset$ est l'élément neutre par rapport à Δ, puisque $A\Delta\emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$. L'inverse de A par rapport à cette opération est A lui-même, puisque $(A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

(f) On sait par (a) que $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) - (A \cap B)$, puisque $C - D = C \cap D^c$ et $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$. En conséquence, puisque $A \cap B \subseteq A \cup B$, $|A\Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|$ et d'après le principe d'inclusion et d'exclusion, on a $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, cqfd.

Exercice 1.4. Soient X et Y des ensembles non vides, $F \subseteq X \times Y$ et $G \subseteq Y \times X$. On définit deux applications ϕ et γ comme suit :

$$\phi : \begin{cases} P(X) & \to & P(Y) \\ A & \mapsto & \{y \in Y \mid \exists a \in A: \quad (a, y) \in F\} \end{cases}$$

et

$$\gamma : \begin{cases} P(Y) & \to & P(X) \\ B & \mapsto & \{x \in X \mid \exists b \in A: \quad (b, x) \in G\} \end{cases}.$$

Montrer que si $\gamma(\phi(\{x\})) = \{x\}$ et $\phi(\gamma(\{y\})) = \{y\}$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, alors F est le graphe d'une fonction bijective f entre X et Y dont on précisera l'inverse.

Solution 1.4. Dans cet exercice, il convient de montrer différentes choses :

1. Il faut d'abord vérifier que$F$ (respectivement G) est le graphe d'une application, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, il existe un et un seul y tel que $(x, y) \in F$. Ceci assure qu'il existe des fonctions f (respectivement g) dont le graphe est F (respectivement G)

2. Ensuite, on peut montrer que f et g sont injectives,
3. que f et g sont surjectives
4. et que f et g sont inverses l'une de l'autre.

Montrons d'abord que pour tout $x \in X$ il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in F$. Donnons-nous un élément $x \in X$ et posons pour plus de commodité $S = \phi(\{x\})$: nous voulons prouver que S n'est pas vide. L'hypothèse de l'énoncé permet d'écrire $\gamma(S) = \{x\}$. Voyons si S est vide ou non. Si S était vide, on aurait $\gamma(S) = \emptyset$ ce qui n'est pas le cas. Donc S n'est pas vide, ce que nous voulions prouver.

Montrons maintenant que tout élément n'a ≪ qu'une seule image ≫. Supposons pour cela que $(x, y_1) \in F$ et $(x, y_2) \in F$ et démontrons que $y_1 = y_2$. Nous savons déjà d'après la définition de ϕ que y_1 et y_2 sont tous deux des éléments de $S = \phi(\{x\})$. A partir de la définition de γ, on remarque que de manière générale, si $U \subset V \subset Y$, $\gamma(U) \subset \gamma(V)$. Comme $\gamma(S) = \{x\}$, cela signifie que $\gamma(\{y_1\}) \subset \{x\}$ et $\gamma(\{y_2\}) \subset \{x\}$. Donc $\gamma(\{y_1\})$ égale $\emptyset$ ou $\{x\}$. Le premier cas est impossible à cause du paragraphe précédant. Donc finalement $\gamma(\{y_1\}) = \{x\} = \gamma(\{y_2\})$. Maintenant, on sait que $\phi(\gamma(\{y_1\})) = \{y_1\}$ et $\phi(\gamma(\{y_2\})) = \{y_2\}$, donc $\phi(\{x\}) = \{y_1\} = \{y_2\}$ et $y_1 = y_2$. A ce stade, nous pouvons introduire la fonction f dont le graphe est F.

Comme F et G jouent des rôles symétriques, le même raisonnement justifie que G est le graphe d'une application que nous appelons g.

Montrons que f est injective. Donnons-nous x_1 et x_2 dans X tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On veut montrer que $x_1 = x_2$. On sait que $\{x_1\} = \gamma(\phi(\{x_1\}))$. Mais $\phi(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$ d'après ce qui précède. De même $\phi(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}$. On a finalement en utilisant notre hypothèse que

$$\{x_1\} = \gamma(\phi(\{x_1\})) = \gamma(\{f(x_1)\}) = \gamma(\{f(x_2)\}) = \gamma(\phi(\{x_2\})) = \{x_2\}.$$

Les ensembles de part et d'autre n'ayant qu'un seul élément, il s'ensuit que $x_1 = x_2$, cqfd.

Montrons que f est surjective. Donnons-nous un élément y de Y et trouvons un élément $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Choisissons $x = g(y)$. Alors, $f(x) = f(g(y))$. Mais on sait que $\phi(\gamma(\{y\})) = \{y\}$ ce qui se traduit par $\{f(g(y))\} = \{y\}$, soit encore $y = f(g(y))$. Nous avons donc démontré que $f(x) = y$ (surjectivité de f) et même que $f \circ g = Id$. Les rôles de f et g étant symétrique, on en déduit que g est aussi une bijection et que g est l'inverse de f.

Exercice 1.5. Soit f une application de $\underline{n}$ dans $\underline{n}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Quand l'une des propriétés est satisfaite, on dit que f est une permutation.

Solution 1.5. Si f est injective, alors, f met en bijection $\underline{n}$ et $f(\underline{n})$. Donc $f(\underline{n})$ est un sous-ensemble de $\underline{n}$ à n éléments, c'est donc $\underline{n}$ tout entier. Ainsi, f est aussi surjective.

Supposons que f est surjective. Alors, pour tout $i \in \underline{n}$, il existe $x_i \in \underline{n}$ tel que $f(x_i) = i$. Ces éléments sont tous distincts et leur ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est de cardinal n. Mais alors comme $X \subset \underline{n}$, X est égal à $\underline{n}$ tout entier. Par conséquent, quel que soit l'indice i, il ne peut se trouver un autre élément $y \notin X$ tel que $f(y) = f(x_i)$. Donc f est injective.

Exercice 1.6. Une université a publié les résultats suivants suite à un recensement de ses étudiants : Il y a 10000 étudiants parmi lesquels 2521 sont marié, 6471 sont des hommes, 3115 ont plus de 21 ans, 1915 sont des hommes mariés, 1873 sont mariés et ont plus de 21 ans et 1302 sont des hommes mariés de plus de 21 ans. Ces nombres peuvent-ils être corrects ?

Solution 1.6. Les étudiants se divisent selon trois critères à deux possibilités chacun (Homme/Femme, Marié/Célibataire, + / - 21 ans) ce qui fait $8 = 2^3$ catégories d'étudiants.
On peut proposer la distribution suivante :

HM+	HM-	HC+	HC-	FM+	FM-	FC+	FC-
1302	613	1242	3314	571	35	0	2923

On vérifie les conditions de l'énoncé l'une après l'autre :

$$\begin{aligned} 1302 + 613 + 1242 + 3314 + 571 + 35 + 0 + 2923 &= 10000 \\ 1302 + 613 + 571 + 35 &= 2521 \\ 1302 + \cdots + 3314 &= 6471 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$