Exercice 2.1. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des applications.

Solution 2.1. Soit $A := \{a, b\}$ et $C := \{c, d\}$. Dans ce cas, une relation $R \subseteq A \times C$ n'est pas une fonction s'il existe $x \in A$ tel que $|\{y \in C \mid (x, y) \in R\}| > 1$. On trouve :

$$\{(a,c),(a,d)\}, \{(a,c),(a,d),(b,c)\}, \{(a,c),(a,d),(b,d)\}, \{(a,c),(b,c),(b,d)\},$$
$$\{(b,c),(b,d),(a,d)\}, \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}, \{(b,c),(b,d)\}.$$

Ainsi il y a 7 relations qui ne sont pas des fonctions.

Une relation R n'est pas une application si R n'est pas une fonction ou si la relation n'est pas totale, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in C$, $(x, y) \notin R$. Cela ajoute donc les cas suivants

$$\emptyset, \{(a,c)\}, \{(a,d)\}, \{(b,c)\}, \{(b,d)\}.$$

et porte à 11 le nombre de relations qui ne sont pas des applications.

Exercice 2.2. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et f une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathcal{E}^2, \qquad x\mathcal{R}y \iff \exists n \in \mathbb{Z}, y = f^n(x).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si C est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, alors $f(C) = C$.
3. Montrer que si X est une partie non-vide de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(X) = X$, alors X est une réunion de classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Solution 2.2.

1. (a) Réfléxivité : si $x \in \mathcal{E}$, on a $x = f^0(x)$, donc $x\mathcal{R}x$.
   (b) Symétrie : si $(x, y) \in \mathcal{E}^2$ tels que $x\mathcal{R}y$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = f^n(x)$. Mais alors $x = f^{-n}(y)$, donc $y\mathcal{R}x$.
   (c) Transitivité : si $(x, y, z) \in \mathcal{E}^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y = f^{n_1}(x)$ et $z = f^{n_2}(y)$. Mais alors, en posant $n = n_1 + n_2$, on a $z = f^n(x)$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in C$, posons $z = f^{-1}(x)$, de sorte que $x = f(z)$. Mais alors $z\mathcal{R}x$ Donc x et z sont dans la même classe d'équivalence, laquelle ne peut que coïncider avec C, car C est une classe. $C \subseteq f(C)$. Si $y \in f(C)$, il existe $x \in C$ tel que $y = f(x)$. Mais alors comme C est une classe, $[x]_\mathcal{R} = C$ et $y\mathcal{R}x$, donc $y \in [x] = C$. Ainsi $f(C) \subseteq C$. Finalement $f(C) = C$.
3. Montrons que $X = \bigcup_{x \in X} [x]_\mathcal{R}$. Il est clair que $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_\mathcal{R}$, car pour tout $x \in X$, $x \in [x]_\mathcal{R}$. Par ailleurs, montrons que si $x \in X$, $[x] \subseteq X$. Soit $y \in [x]$, alors il existe un entier n_0 tel que $y = f^{n_0}(x)$. Si n_0 est nul, il n'y a rien à montrer. Si $n_0 > 0$, on peut remarquer que $x \in X$, implique que $f(x) \in f(X) = X$ et en répétant le raisonnement (récurrence), $f^{n_0}(x) = f(f^{n_0-1}(x)) \in f(X) = X$. Si $n_0 < 0$, le même raisonnement fonctionne en observant que $f^{-1}(X) = X$.

Exercice 2.3. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) \setminus \emptyset) \times (P(X) \setminus \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ lorsque $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive ? c'est-à-dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X) \setminus \emptyset$?

(b) R est-elle symétrique ? c'est-à-dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

(c) R est-elle transitive ? c'est-à-dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Solution 2.3.

(a) La relation ne serait pas réflexive si $A \in P(X)$. Lorsque $A = \emptyset$, alors $(\emptyset, \emptyset) \notin R$. Mais si $A \in P(X) - \emptyset$, alors $A \cap A = A \neq \emptyset$, si bien que $(A, A) \in R$.

(b) C'est clairement le cas puisque $A \cap B = B \cap A$, si bien que ces ensembles sont tous les deux vides ou non simultanément.

(c) La relation n'est pas transitive. Supposons que $B = A \sqcup C$, où $A, C \neq \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$. Alors $(A, B) \in R$ et $(B, C) \in R$ mais $(A, C) \notin R$.

Exercice 2.4. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence ? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Solution 2.4. Dans les deux cas, R est transitive par définition et l'on peut montrer facilement en utilisant la transitivité que R est aussi réflexive. En effet, donnons-nous un entier a, alors $(a, a + 2) \in R$ et $(a + 2, a) \in R$, donc par transitivité, $(a, a) \in R$. Le problème est donc de montrer la symétrie.

Dans le premier cas, on peut observer que tous les nombres de même parité $(a, a + 2n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont en relation. Toutefois, ces conditions ne suffisent pas à imposer la symétrie. On peut en effet imaginer la relation $R = \{(2n, 2n'), (2n + 1, 2n' + 1), (2n, 2n' + 1); n, n' \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est pas symétrique.

Dans le second cas, les entiers dont la différence est divisible par 3 ou par 4 sont dans R. Mais alors comme 3 et 4 sont premiers entre eux, tout couple d'entiers dont la différence est divisible par le p.g.c.d. de 3 et 4 appartient à R. Autrement dit, tout couple d'entier appartient à R. Donc R est trivialement une relation d'équivalence.

Exercice 2.5. Pour une relation R sur l'ensemble X, on définit la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$. Répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les relations R^n sont distinctes quand $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.

Solution 2.5.

1. L'ensemble X est fini, il en va de même de $P(X \times X)$. Comme $R^n \in P(X \times X)$ pour tout entier n, il s'ensuit que la suite $R, R^2, R^3, \ldots$ ne peut être formée d'ensembles tous distincts (lemme des tiroirs). Ainsi il existe deux indices r et s ($r < s$) tels que $R^r = R^s$.
2. Soit $R = \{(1, 2), (2, 1)\} \subset \{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Alors, $R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ et $R^3 = R \circ R^2 = R$. Plus généralement, $R^n = R^2$ si n est pair et $R^n = R$ si n est impair.
3. Soit R la relation « successeur direct », c'est-à-dire, $R = \{(a, a + 1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, alors, $R^n = \{(a, a + n) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Les relations $(R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc toutes distinctes.
4. D'après la définition 3.3, on sait que R est transitive ssi $R^2 \subseteq R$. Supposons que R soit transitive. Raisonnons par récurrence et supposons avoir démontré que $R^n \subseteq R$ pour un certain $n \geq 2$. Il s'ensuit que $R^{n+1} = R \circ R^n \subseteq R \circ R \subseteq R$, ce qui prouve notre assertion. Réciproquement, supposons que pour tout entier $n \geq 2$, $R^n \subseteq R$, alors pour $n = 2$ en particulier, nous avons $R^2 \subseteq R$ ce qui est la définition de la transitivité.

Exercice 2.6. Dans l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall f, g \in E, \qquad f \mathcal{R} g \quad \text{si} \quad \exists \varphi \in E \text{ bijective}, \ \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. A-t-on que $\cos \mathcal{R} \sin$?
3. Former une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q) \in \mathbb{R}$ pour que les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + px + q \end{cases}$$

soient équivalentes.

Solution 2.6.

1. (a) Réfléxivité : Soit $f \in E$. En prenant $\varphi = \mathrm{Id}$, on a bien $\varphi \circ f = f \circ \varphi$. Donc $f \mathcal{R} f$.
   (b) Symétrie : Soient $(f,g) \in E^2$. Si $f \mathcal{R} g$, *i.e.* il existe une bijection φ telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, alors comme φ est bijective, on peut écrire $\varphi^{-1} \circ g = f \circ \varphi^{-1}$. Donc $g \mathcal{R} f$.
   (c) Transitivité : Soient $(f,g,h) \in E^3$. Si $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$, autrement dit si $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ et $\varphi' \circ g = h \circ \varphi'$ pour des certaines bijections φ et φ', alors $\varphi' \circ \varphi \circ f = \varphi' \circ g \circ \varphi = h \circ \varphi' \circ \varphi$. Donc $f \mathcal{R} h$.
2. Supposons que $\sin$ et $\cos$ vérifient $\varphi \circ \cos = \sin \circ \varphi$ pour une certaine bijection φ. Notons qu'alors on a aussi $\cos \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sin$. On observe que quand x parcourt $\mathbb{R}$, $\sin(x)$ parcourt $[-1,1]$ et par ailleurs $\sin(\varphi(x)) \in [-1,1]$. Aussi $\mathrm{Im}\varphi_{[-1,1]} \subseteq [-1,1]$. De même, $\mathrm{Im}\varphi^{-1}_{[-1,1]} \subseteq [-1,1]$. En combinant, on obtient que $[-1,1] = \mathrm{Im}\varphi \circ \varphi^{-1} \subseteq \varphi([-1,1])$, si bien que $\varphi_{|[-1,1]}$ est encore bijection sur $[-1,1]$. Or $\sin \circ \varphi$ est par conséquent également une injection alors que $\varphi \circ \cos$ ne l'est pas, puisque $\cos$ est paire. Cette contradiction montre que $\sin$ et $\cos$ ne sont pas équivalents.
3. On commence par noter que si φ est la translation $x \mapsto x + c$, $\varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = (x+c)^2 - c = x^2 + 2cx + c^2 - c$.
   Quitte à translater, on peut supposer que g est de la forme $x \mapsto x^2 + \lambda$. Montrons que f et g sont équivalents si et seulement si $\lambda = 0$.
   On observe que pour que f et g soient équivalents, il faut et il suffit que
   $$\varphi(x^2) = \varphi(x)^2 + \lambda$$
   où φ est une bijection. Mais alors, par restriction, φ est une bijection $\mathbb{R}_+ \to [\lambda, +\infty[$. En effet, comme φ est injectif, sa restriction l'est aussi. De plus, pour tout $y \geq \lambda$, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x_1) = \sqrt{y - \lambda}$. Mais alors en prenant $x_0 = x_1^2 \in \mathbb{R}_+$, on a $\varphi(x_0) = y$. Donc la restriction de φ est aussi surjective.
   On observe aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)^2 = \varphi(-x)^2 = \varphi(x^2) - \lambda$. Comme φ est une bijection, on a $\varphi(x) = -\varphi(-x)$.
   A présent, si $\lambda > 0$, l'image de φ sur $\mathcal{R}_+$ est contenue dans $[\lambda, +\infty[$ et sur $\mathcal{R}_-$ dans $]-\infty, -\lambda]$. On en déduit que φ n'est surjective. Inversement, si $\lambda < 0$, il existe $x_1, x_2 \in \mathcal{R}_+$ tels que $\varphi(x_1) = -\lambda/2$ et $\varphi(x_2) = +\lambda/2$, mais alors par imparité, $\varphi(-x_1) = \lambda/2 = \varphi(x_2)$, donc φ n'est pas injective.
   Il en résulte que $x \mapsto x^2$ n'est équivalent à aucune application $x \mapsto x^2 + \lambda$ avec $\lambda \neq 0$. Les applications f et g sont équivalentes si et seulement si $q = \frac{p^2}{4} - \frac{p}{2}$ (Dans ce cas, φ peut être choisie comme la translation $x \mapsto x + \frac{p}{2}$; on peut montrer que c'est le seul choix possible).