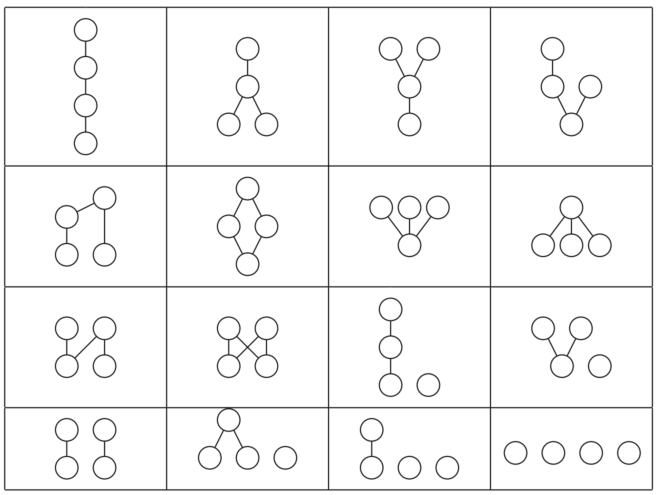
Exercice 3.1. On considère le poset formé de $P(\mathbb{R})$ ordonné par l'inclusion. Soit $\mathcal{A} = \{[-1,0], [-1,2], [0,1]\}$ et $\mathcal{B} = \{[\sin(n), \cos(n)];\ n \in \mathbb{Z}, \sin(n) < \cos(n)\}$. Etudier l'existence pour $\mathcal{A}$ et pour $\mathcal{B}$ de minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, plus petit élément, plus grand élément.

Solution 3.1. Notons $A_1 = [-1,0]$, $A_2 = [-1,2]$, $A_3 = [0,1]$.
Tout minorant m est contenu dans chacun des trois éléments de $\mathcal{A}$, soit $m \subseteq \bigcap_{1\le i\le 3} A_i$. Il y a deux minorants $\emptyset$ et $\{0\}$.
Tout majorant M contient les trois éléments de $\mathcal{A}$, soit $[-1,2] \subseteq M$.
Le plus grand des minorants, ou borne inférieure, est $\{0\}$, le plus petit des majorants, ou borne supérieure, est $[-1,2]$.
Le minimum, ou plus petit élément de $\mathcal{A}$ n'existe pas. Le maximum, ou plus grand élément de $\mathcal{A}$ est $[-1,2]$.

Pour déterminer le minorant de $\mathcal{B}$, il faut déterminer $I = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}}[\sin(n), \cos(n)]$. Montrons que $I = \emptyset$. Comme $\mathbb{Z}[\pi]$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto \exp(ix)$ est une application continue, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\cos(k)$ et $\sin(k) \in [\frac{\sqrt{2}}{2} - \epsilon, \frac{\sqrt{2}}{2} + \epsilon]$ et il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $\cos(k')$ et $\sin(k') \in [-\frac{\sqrt{2}}{2} - \epsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \epsilon]$. Mais pour ϵ assez petit, ces deux intervalles sont disjoints. Donc le seul minorant de $\mathcal{B}$ est $\emptyset$. C'est aussi la borne inférieure. On observe encore qu'il n'y a pas de minimum.
Tout majorant contient la réunion des intervalles $U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[\sin(n), \cos(n)]$ qui est égale à $]-1,1]$. La borne supérieure est $]-1,1]$. Il n'y a pas de maximum.

Exercice 3.2. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.

Solution 3.2. Voici la liste en terme de diagramme de Hasse :



Exercice 3.3. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *bien-fondé* s'il n'existe nulle chaîne infinie $\cdots x_{n+1} \prec x_n \prec \cdots \prec x_1$ d'éléments décroissants. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *dense* si pour tous $x, z \in R$ tels que $x \prec z$, il existe $y \in R$ tel que $x \prec y \prec z$.

1. $(\mathbb{Q}, \le)$ forme-t-il un poset bien-fondé ? un poset dense ?
2. L'ensemble des mots formé de lettres de l'alphabet muni de l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire) est-t-il un poset bien-fondé ? un poset dense ?
3. On dit qu'un poset $(R, \preccurlyeq)$ est *bien-ordonné* quand l'ordre est total et que toute partie de R possède un plus petit élément. Montrez qu'un poset est bien ordonné ssi il est bien-fondé et totalement ordonné.

Solution 3.3.

1. On peut considérer la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est infinie et strictement décroissante. Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas bien-fondé.
   Soient $x, z \in \mathbb{Q}$, alors $y = \frac{x+z}{2}$ vérifie $x < y < z$. Donc $\mathbb{Q}$ est un poset dense.
2. La suite $(a^n b)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $a^n = a \cdots a$ avec n répétitions de a) est une suite infinie strictement décroissante. Donc les mots de l'alphabet ne forment pas un poset bien-fondé.
   Par ailleurs, il n'existe pas de mots compris entre a et aa. Donc ce poset n'est pas dense.
3. Supposons que R est bien-ordonné. Alors par hypothèse, l'ordre est total. Soient $\cdots x_{n+1} \prec x_n \prec \cdots \prec x_1$ une suite infinie de termes décroissants et $S = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse S possède un plus petit élément x_{n_0} qui satisfait à $x_{n_0} \preccurlyeq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais alors $x_{n_0+1} \prec x_{n_0} \preccurlyeq x_{n_0+1}$ ce qui est une contradiction. Donc R est bien-fondé.
   Réciproquement, soit R un poset totalement ordonné et bien-fondé. Soit S un sous-ensemble de R qui ne contient pas de plus petit élément. On peut donc construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de S. Mais ceci contredit le fait que R est bien-fondé. Donc S n'existe pas et R est bien-ordonné.

Exercice 3.4. Soit $(R, \preccurlyeq)$ un poset.

1. Soient $a, b \in R$ tels que $a \not\preccurlyeq b$. Montrer que la relation définie par
$$x \preccurlyeq^* y \quad \text{si} \begin{cases} x \preccurlyeq y \\ \text{ou} \\ x \preccurlyeq b \text{ et } a \preccurlyeq y \end{cases}$$
   est un ordre sur R.
2. En supposant que R est fini, montrer que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$.
3. On considère le poset $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq}(R), \subseteq)$ des ordres partiels sur R contenant $\preccurlyeq$ ordonnés par l'inclusion. Montrez que les éléments maximaux de ce poset sont les ordres totaux
4. Montrez que toute chaîne C de ce poset est majorée (on pourra montrer que la relation $\leq = \cup_{\trianglelefteq \in C} \trianglelefteq$ est un ordre dans ce cas).
5. En déduire que l'ordre partiel $\preccurlyeq$ est l'intersection de tous les ordres totaux qui contiennent $\preccurlyeq$ quelque soit le cardinal de R.

Solution 3.4. Ce résultat est dû à E. Szpilrajn. Remarque : attention $a \not\preccurlyeq b$ n'est pas équivalent à $b \not\preccurlyeq a$! On peut par ailleurs commencer par s'assurer que l'intersection de deux ordres partiels est un ordre partiel.

1. Il faut vérifier les trois axiomes qui définissent une relation d'ordre. Soient $x, y, z \in R$. Pour la réflexivité, on a $x \preccurlyeq^* x$ car $x \preccurlyeq x$. Pour l'antisymétrie, si $x \preccurlyeq^* y$ et $y \preccurlyeq^* y$ alors quatre cas peuvent se produire :
   – $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ ce qui conduit à $x = y$ car $\preccurlyeq$ est un ordre,
   – $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq x$, alors par transitivité $a \preccurlyeq b$ ce qui est exclu,
   – ou encore $x \preccurlyeq b$, $a \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq y$, mais alors $a \preccurlyeq b$ ce qui est exclu.
   Le cas restant se traite comme le second cas. Enfin pour la transitivité, si $x \preccurlyeq^* y$ et $y \preccurlyeq^* z$, alors soit $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$ d'où $x \preccurlyeq z$, soit $x \preccurlyeq y \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq z$, soit $x \preccurlyeq b$ et $a \preccurlyeq y \preccurlyeq z$, soit $a \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq b$ ce qui n'est pas possible
2. Il est clair que l'ordre $\preccurlyeq$ est contenu dans l'intersection des ordres totaux le contenant. Il reste à démontrer que si $a \not\preccurlyeq b$ pour un certain couple (a, b), alors il existe un ordre total $\trianglelefteq$ contenant $\preccurlyeq$ pour lequel $a \ntrianglelefteq b$, c'est-à-dire (comme l'ordre est total) $b \triangleleft a$.
   On a vu à la question précédente comment raffiner $\preccurlyeq$ de sorte que $b \preccurlyeq^* a$. Si le nouvel ordre $\preccurlyeq^*$ n'est pas total, on ré-applique le procédé tant qu'il existe des couples (c, d) non comparables dans $R \times R$. Comme $R \times R$ est fini, il n'est nécessaire de le faire qu'un nombre fini de fois et l'on obtient un ordre total $\trianglelefteq$ tel que $b \trianglelefteq a$ comme attendu.

3. Si un ordre n'est pas total, alors il existe $(a, b) \in R$ non comparables et la question 1 montre comment trouver un ordre strictement plus grand pour l'inclusion. Donc cet ordre n'est pas maximal.

   Par ailleurs, si un ordre $\preccurlyeq$ n'est pas maximal, alors, il existe un ordre $\preccurlyeq'$ tel que $\preccurlyeq \subset \preccurlyeq'$. Soient deux éléments a et b distincts tel que $a \preccurlyeq' b$ et $a \not\preccurlyeq b$. Mais alors $b \not\preccurlyeq a$, car sinon on aurait encore $b \preccurlyeq' a$. Donc a et b ne sont pas comparables et $\preccurlyeq$ n'est pas total.
4. Soit à présent C une chaîne d'ordres et posons $\leq = \cup_{\trianglelefteq \in C} \trianglelefteq$. Montrons que la relation $\leq$ est un ordre [1]. La relation $\leq$ est clairement réflexive. Supposons que $a \leq b$ et $b \leq a$. Alors il existe des ordres $\trianglelefteq_1$ et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 a$. Comme l'ordre sur C est total, soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par antisymétrie de $\trianglelefteq_2$, $a = b$. Enfin, supposons que $a \leq b$ et $b \leq c$, alors il existe des ordres $\trianglelefteq_1$ et $\trianglelefteq_2 \in C$ tels que $a \trianglelefteq_1 b$ et $b \trianglelefteq_2 c$. Comme l'ordre sur C est total, soit $\trianglelefteq_1 \subseteq \trianglelefteq_2$ soit $\trianglelefteq_2 \subseteq \trianglelefteq_1$. Dans le premier cas, on en déduit que $a \trianglelefteq_2 b$, donc par transitivité $a \trianglelefteq_2 c$ et finalement $a \leq c$. Dans le second cas, on fait de même. Donc $\leq$ est un ordre et majore la chaîne C.
5. Le lemme de Zorn appliqué au poset $(\mathcal{PO}_{\preccurlyeq^*}(R), \subseteq)$ montre qu'il existe un élément maximal disons $\leq$. Cet ordre $\leq$ est un ordre total qui contient $\preccurlyeq$ et par construction vérifie que $a \not\leq b$. On peut donc raisonner comme pour la question 2.

Exercice 3.5. Soit $(P, \leq)$ un poset. On appelle *noyau linéaire* du poset $(P, \leq)$ et on note $K(P)$ l'ensemble des éléments de P comparables à tous les éléments de P. Montrez que $K(P)$ est l'intersection de toutes les chaînes maximales de P. (On montrera avec soin que tout élément de P appartient à une chaîne maximale).

Solution 3.5. Commençons par démontrer l'indication. Soit $y \in P$. On considère le poset $(\mathcal{C}_y(P), \subseteq)$ de l'ensemble des chaînes χ de P contenant y ordonnées par l'inclusion. Une chaîne C de ce poset (c.-à.-d. un chaîne de chaînes de P totalement ordonnée) possède toujours un majorant : l'union $\cup_{\chi \in C} \chi$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{C}_y(P)$ possède un élément maximal, c'est-à-dire une chaîne de P contenant y. Donc tout $y \in P$ appartient à une chaîne maximale.

Procédons par double inclusion. Supposons maintenant que x appartient à toute chaîne maximale. Soit y dans P. Nous venons de voir qu'il existe une chaîne maximale C telle que $y \in C$. Comme $x \in C$, x et y sont comparables donc $x \in K(P)$.

Réciproquement, soit x un élément de $K(P)$. Soit C une chaîne qui ne contient pas x. Alors, comme x est comparable à tous les éléments de P, $C' = C \cup \{x\}$ est encore une chaîne strictement plus longue que C. Donc toute chaîne maximale contient x, ce qui achève la preuve.

Exercice 3.6. Soit n un entier qui n'est divisible par aucun carré. Soit μ la fonction de Möbius du treillis $(\mathrm{Div}(n), |)$. Montrer que $\mu(n) = (-1)^t$ où t est le nombre de facteurs premiers de n. (Indice : on pourra établir une relation entre les diviseurs de n et un treillis Booléen approprié).

Solution 3.6. L'entier n possède une décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=0}^{t-1} p_i$ où $p_0, \dots, p_{t-1}$ sont des nombres premiers tous distincts. Alors, $\mathrm{Div}(n) = \{\prod_{i=0}^{t-1} p_i^{e_i} \mid e_i \in \{0, 1\}\}$. Définissons l'application $f : \mathcal{B}_t \to \mathrm{Div}(n)$ par $f(S) = \prod_{s \in S} p_i^s$. Cette application est bijective : si $d = \prod_{i=0}^{t-1} p_i^{e_i}$ et $S := \{i \mid e_i = 1\}$, alors $f(S) = d$, donc f est surjective. D'autre part, f est injective car la factorisation en nombres premiers est unique (à l'ordre près). De plus, $S_1 \subseteq S_2$ ssi $f(S_1) \mid f(S_2)$. Ainsi, f met en bijection les posets $(\mathcal{B}_t, \subseteq)$ et $(\mathrm{Div}(n), |)$. La valeur $\mu(n)$ est la valeur de $\mu_{\mathcal{L}}(1, n)$ par définition, où $\mathcal{L} = (\mathrm{Div}(n), |)$. A cause de cette bijection f, cette valeur est la même que la valeur de $\mu_{\mathcal{L}'}(\emptyset, \underline{t})$, où $\mathcal{L}' = (\mathcal{B}_t, \subseteq)$. D'après le théorème 4.21.(2), cette dernière égale $(-1)^{|\underline{t}|} = (-1)^t$.

Exercice 3.7. Soient R et S des relations sur $A \times B$ et $C \times D$, respectivement. Le *produit* $R \times S$ est une relation sur $(A \times C) \times (B \times D)$ telle que $((a, c), (b, d)) \in R \times S$ ssi $(a, b) \in R$ et $(c, d) \in S$.

1. Caveat : en général, l'union d'ordres quelconques n'est pas un ordre !

1. Montrer que si R et S sont des relations d'ordre sur les ensembles A et B, la relation $R \times S$ est une relation d'ordre sur $A \times B$. On montre ainsi que le produit de deux posets est un poset. De même, montrer que le produit de deux treillis est un treillis.
2. Sous quelle condition est-il vrai que le produit de $(\mathrm{Div}(n), |)$ et $(\mathrm{Div}(m), |)$ a la même structure que $(\mathrm{Div}(nm), |)$? (Donner une démonstration de votre réponse.)

Solution 3.7.

1. On vérifie comme suit :
   (a) Réflexivité : comme $(a, a) \in R$ pour $a \in A$ et $(b, b) \in B$ pour $b \in B$, on a $((a, b), (a, b)) \in S \times R$, par définition de $S \times R$.
   (b) Antisymétrie : supposons que $((a, b), (a', b')) \in R \times S$ et $((a', b'), (a, b)) \in R \times S$. On tire de la définition de $R \times S$ que $(a, a'), (a', a) \in R$, donc $a = a'$ par antisymétrie de R. De même, on prouve que $b = b'$.
   (c) Transitivité : supposons que $((a, b), (a', b')), ((a', b'), (a'', b'')) \in R \times S$. Par définition de $R \times S$, on déduit que $(a, a'), (a', a'') \in R$ et par conséquent $(a, a'') \in R$ par transitivité de R. De la même manière $(b, b'') \in S$. D'où, par définition, $((a, b), (a'', b'')) \in R \times S$.

   Afin de montrer que le produit de deux treillis est encore un treillis, soit $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ deux éléments de $A \times B$. Soient $a_3 := a_1 \wedge a_2$ et $b_3 = b_1 \wedge b_2$. Alors $(a_3, b_3) = (a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2)$: par définition, $a_3 \leq a_1$ et $a_3 \leq a_2$, et de même pour les b. D'autre part si $(a_4, b_4) \leq (a_1, b_1)$ et $(a_4, b_4) \leq (a_2, b_2)$, alors, comme $a_4 \leq a_1$ et $a_4 \leq a_2$, on sait que $a_4 \leq a_3$ et de la même faÃ§on $b_4 \leq b_3$. D'où, (a_3, b_3) est la borne inférieure de (a_1, b_1) et (a_2, b_2). L'existence et l'unicité de la borne supérieure est prouvée de la même manière.
2. Supposons que $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$. Alors pour tout $d \mid nm$ il existe un unique couple $d_1 \mid n$ et $d_2 \mid m$ tel que $d = d_1 d_2$. Considérons l'application

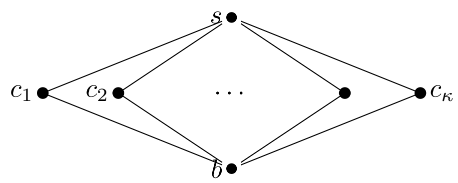
   $$f : \begin{cases} \mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m) & \rightarrow & \mathrm{Div}(nm) \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{cases}$$

   Nous venons de voir que f est une bijection. Il reste Ã prouver que f et f^{-1} respectent les ordres. Soient $n_1, n_2 \in \mathrm{Div}(n)$ et $m_1, m_2 \in \mathrm{Div}(m)$ tels que $n_1 \mid n_2$ et $m_1 | m_2$. Alors $f(n_1, m_1) = n_1 m_1 \mid n_2 m_2 = f(n_2, m_2)$. Réciproquement, supposons que $f(m_1, n_1) = m_1 n_1 \mid m_2 n_2 = f(m_2, n_2)$. Comme n et m sont premiers entre eux, tout diviseur premier de m_1 est un diviseur de m et n'est pas un diviseur de n, ni de n_2. De même tout diviseur premier de n_1 est un diviseur de n et n'est pas un diviseur de m, ni de m_2. Donc $m_1 \mid m_2$ et $n_2 \mid n_2$. Ceci montre que l'application f est un isomorphisme entre $(\mathrm{Div}(n), |) \times (\mathrm{Div}(m), |)$ et $(\mathrm{Div}(nm), |)$.

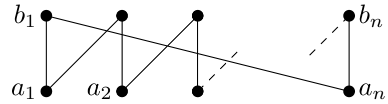
   Montrons à présent que si $\mathrm{pgcd}(n, m) \neq 1$, alors $|\mathrm{Div}(n) \times \mathrm{Div}(m)| \neq |\mathrm{Div}(nm)|$. Ce qui suit montre que les structures des treillis donnés ne sont pas les mêmes. Soit $\sigma(n) := |\mathrm{Div}(n)|$. Nous avons vu plus haut que $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ si m et n sont premiers entre eux. D'où, $\sigma(\prod_{i=1}^t p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^t \sigma(p_i^{a_i})$, où les p_i sont des premiers distincts et les a_i sont des entiers strictement positifs. On voit facilement que $\sigma(p_i^{a_i}) = (a_i + 1)$, si bien que $\sigma(\prod_{i=1}^t p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^t (a_i + 1)$. Ainsi, si $n = p^a n'$ et $m = p^b m'$ où p est un premier qui ne divise pas $m'n'$, alors $\sigma(mn) = (a + b + 1)\sigma(m'n') \neq (a + 1)\sigma(n')(b + 1)\sigma(m')$, si a et b sont tous les deux plus grands que un. Ceci montre notre assertion.

Exercice 3.8. Calculez la largeur des treillis suivants

1. $\mathcal{A}_\kappa$ est une antichaîne de cardinal κ.
2. $\mathcal{M}_\kappa$ correspond au diagramme de Hasse ci-dessous.



3. $\mathcal{C}_n$, où $n \in \mathbb{N}$, qui correspond au diagramme en couronne ci-dessous



4. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ où X est un ensemble fini.

Solution 3.8.

1. La largeur de $\mathcal{A}_\kappa$ est κ par définition.
2. Notons que $C = \{c_1, \ldots, c_\kappa\}$ est une antichaîne. Soit A une antichaîne. Si A contient s ou b, A ne peut pas contenir d'autre élément. Donc C est maximale et la largeur vaut κ
3. On remarque que les seules chaînes de $\mathcal{C}_n$ possèdent soit un seul élément, soit deux éléments, à savoir (a_i, b_i) ou bien $(a_i, b_{i+1 \mod n})$. Il faut donc au moins n chaînes pour recouvrir tout le poset. Cette borne inférieure est atteinte lorsqu'on prend par exemple les chaînes $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$. D'après le théorème de Dilworth, on conclut que la largeur vaut n.
4. En notant $n = |X|$, on peut identifier X à $[n]$ et appliquer le théorème de Sperner : la largeur de $(\mathcal{P}(X), \subset)$ vaut $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 3.9. Soit $(R, \leq)$ un poset de cardinal supérieur à $ab + 1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $(R, \leq)$ possède soit un antichaîne de longueur supérieure à $a+1$, soit une chaîne de longueur supérieure à $b + 1$.

Solution 3.9. Notons ℓ la largeur du poset. Deux cas peuvent se présenter : $\ell \geq a + 1$ ou $\ell \leq a$. Dans le premier cas, cela signifie que R possède une antichaîne de cardinal $\ell \geq a + 1$. Dans le second cas, d'après le théorème de Dilworth, il existe une décomposition de R en ℓ chaînes. Notons m le maximum de leur cardinal, de sorte que $|R| \leq \ell m \leq am$. Mais $|R| = ab + 1$, donc $m > b$ ce qui achève de démontrer l'alternative.