Exercice 6.1. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \ldots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$.

Solution 6.1.

1. On vérifie que formellement $(1-x)(1+\cdots+x^n+\cdots) = 1$. La série génératrice est $1+\cdots+x^n+\cdots = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.
2. En posant $A = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ et en appliquant l'opérateur de dérivation formelle ∂, on obtient
$$\partial(A) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$
La suite associée est la suite des entiers strictement positifs.
3. Dérivons une seconde fois, $\partial\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Ainsi
$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n$$
La suite est donc $\left(\binom{n+2}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On décompose la série comme suit
$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)x^n - \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$$
D'après la question 3, le premier terme vaut $\frac{2}{(1-x)^3}$ et d'après la question 2, le second terme vaut $\frac{1}{(1-x)^2}$. Donc
$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n = \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Exercice 6.2. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
2. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

Solution 6.2.

1. Introduisons la série $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. La relation $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$ peut s'écrire
$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} x^{n+1} = 0.$$
On reconnaît alors les termes suivants : $A - a_0$, $2xA$ et $\frac{x}{1-x}$. Il s'ensuit que
$$(1-2x)A - \frac{x}{1-x} = 0.$$
D'où l'on tire
$$A = \frac{1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} 2^{n+1}x^n - \sum_{n\geq 0} x^n.$$
Ainsi $a_n = 2^{n+1} - 1$.

2. Introduisons la série $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. La relation $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} - a_n - 2^n = 0$ peut s'écrire
$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 2^n x^{n+1} = 0.$$
On reconnaît les termes suivants : $A - a_0$, xA et $\frac{x}{1-2x}$. Il s'ensuit que
$$(1-x)A - \frac{x}{1-2x} = 0.$$
D'où l'on tire
$$A = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n.$$
Ainsi $a_n = 2^n$ pour tout n.

Exercice 6.3. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.
1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment ?

Solution 6.3.
1. Soit $P = \sum_{n\geq 0} P_n x^n$ la série génératrice des nombres de Pell. On a par hypothèse
$$\sum_{n\geq 2} P_n x^n - 2\sum_{n\geq 2} P_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 2} P_{n-2}x^n = 0.$$
On reconnaît les termes suivants : $P - P_0 - P_1 x$, $x(P - P_0)$ et $x^2 P$, ce qui conduit à l'équation
$$P - x - 2xP - x^2 P = 0.$$
La série génératrice est donc
$$P = \frac{x}{1-2x-x^2}.$$
2. En utilisant la proposition 6.4(2) du cours, on en déduit que
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} P_n x^n &= \frac{x}{1-2x-x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-x(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{1-x(1-\sqrt{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n\geq 0}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)x^n.\end{aligned}$$
D'où, $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$ pour tout $n \geq 0$.
3. On a
$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} = \frac{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}.$$
Comme $|(1-\sqrt{2})/(1+\sqrt{2})| < 1$, il s'ensuit que $P_{n+1}/P_n \to 1+\sqrt{2}$ lorsque $n \to \infty$.

4. Comme $(P_{n+1} - P_n)/P_n \to \sqrt{2}$ quand $n \to \infty$, on dispose d'un algorithme rapide pour approximer $\sqrt{2}$ par des fractions : on calcule les valeurs de P_n ; il ne reste qu'à appliquer la formule ci-dessus. Voici ci-dessous les valeurs des fractions et leur distance à $\sqrt{2}$:

n	P_n	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1}$	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1} - \sqrt{2}$
2	2	1	-0.4142135623
3	5	$\frac{3}{2}$	0.0857864376
4	12	$\frac{7}{5}$	-0.0142135623
5	29	$\frac{17}{12}$	0.0024531042
6	70	$\frac{41}{29}$	-0.0004204589
7	169	$\frac{99}{70}$	0.0000721519
8	408	$\frac{239}{169}$	-0.0000123789
9	985	$\frac{577}{408}$	0.0000021239
10	2378	$\frac{1393}{985}$	-0.0000003644
11	5741	$\frac{3363}{2378}$	0.0000000625
12	13860	$\frac{8119}{5741}$	-0.0000000107
13	33461	$\frac{19601}{13860}$	0.0000000018
14	80782	$\frac{47321}{33461}$	-0.0000000003
15	195025	$\frac{114243}{80782}$	5.4178×10^{-11}
16	470832	$\frac{275807}{195025}$	-9.2955×10^{-12}
17	1136689	$\frac{665857}{470832}$	1.5950×10^{-12}
18	2744210	$\frac{1607521}{1136689}$	-2.7364×10^{-13}
19	6625109	$\frac{3880899}{2744210}$	4.6948×10^{-14}

Exercice 6.4. Soit n un entier et soit S_n le nombre de vecteurs $(s_1, \dots, s_k) \in \{1, 2, 3\}^k$ tels que $\sum_i s_i = n$ et $k \geq 1$ entier. Par exemple, $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4$ et $S_4 = 7$.

1. Trouver une récurrence pour S_n qui fait intervenir S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
2. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que S_n/θ^n converge vers un nombre réel non nul quand n tend vers l'infini. Calculer les premières décimales de θ.

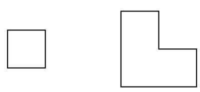
Solution 6.4.

1. Soit $\Sigma_n := \{(s_1, \dots, s_k) \mid \sum_{i=1}^k s_i = n, s_i \in \{1,2,3\}\}$, on a alors $S_n = |\Sigma_n|$. Pour $\ell = 1,2,3$ soit $\Sigma_{n,\ell} := \{(s_1,\dots,s_k) \mid \sum_i s_i = n, s_i \in \{1,2,3\}, s_k = \ell\}$ et donc $\Sigma_n = \sqcup_{\ell=1}^3 \Sigma_{n,\ell}$. On remarque que $|\Sigma_{n,\ell}| = S_{n-\ell}$, ainsi
$$S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + S_n$$
pour $n \geq 1$.
2. Considérons la série génératrice $S(x)$ associée à S_n. La formule de récurrence ci-dessus se traduit en une équation sur la série génératrice :
$$S(x) = xS(x) + x^2S(x) + x^3S(x) + P(x)$$
avec $P(x)$ un polynôme du second degré qui tient compte des conditions initiales. On en déduit que
$$S(x) = \frac{P(x)}{1 - x - x^2 - x^3}.$$
La valeur exacte ainsi que le comportement asymptotique de S_n peut se déduire de la décomposition en éléments simples de $S(x)$. Cherchons d'abord les racines de $1-x-x^2-x^3$. Il est facile de voir que cette fonction est strictement décroissante, de plus elle est positive en 0 et négative en 1, elle admet donc une seule racine réelle r. En utilisant la calculatrice, on peut obtenir un valeur approché de r, 0.543. On peut alors écrire $1 - x - x^2 - x^3 = -(x-r)(x^2+bx+c)$. En identifiant les termes on trouve $c = 1/r$ et $b = 1 + r$. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, les deux racines complexes conjuguées w et $\overline{w}$ de $1 - x - x^2 - x^3$ s'écrivent $(-b \pm \sqrt{\Delta})/2$ et, ce qui est plus important, sont de module $\sqrt{(b^2+\Delta)/4} = 1/\sqrt{r}$. Finalement, on peut écrire
$$S(x) = \frac{A}{1 - x/r} + \frac{B}{1 - x/w} + \frac{C}{1 - x/\overline{w}}$$
avec A réel et B, C complexes et conjugués. Ce qui donne
$$S_n = A(1/r)^n + B(1/w)^n + \overline{B}(1/\overline{w})^n\ .$$
De plus, A est non nul car sinon comme $|1/w| < 1$, $S(x)$ tendrait vers 0 ce qui n'est clairement pas le cas. On en déduit que S_n se comporte comme A/r^n et avec $\theta = 1/r$ on montre que la limite de l'énoncé existe et vaut A.

Exercice 6.5. Calculer la somme
$$\sum_{u=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}\ .$$
(Indice : exprimer cette somme comme un coefficient d'un produit de deux polynômes).

Solution 6.5. Soient $f = \sum_i \binom{n}{i}(-x)^i$ et $g = \sum_i \binom{n}{i}(x)^i$. La somme en question est le coefficient de x^n dans gf. Mais $f = (1-x)^n$ et $g = (1+x)^n$, si bien que $gf = (1-x^2)^n$. Le coefficient de x^n dans ce polynome est nul si n est impair et vaut $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ si n est pair.

Exercice 6.6. On considère un rectangle de taille $n \times 2$. On note R_n le nombre de pavages du rectangle par les pièces dessinées ci-dessous et orientées dans n'importe quel sens. Par convention, $R_0 = 1$.

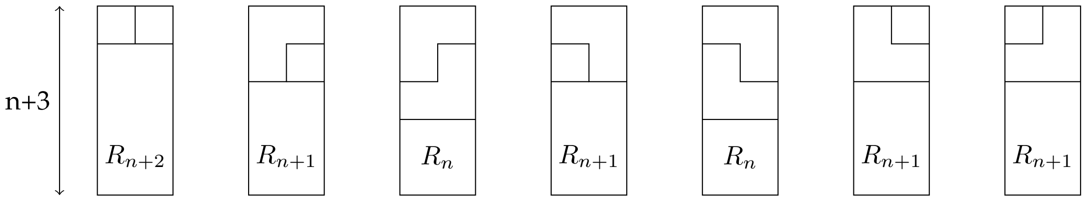


1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+3} = R_{n+2} + 4R_{n+1} + 2R_n$ et que $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 11$.

2. Exprimer la série génératrice $S(x)$ de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme d'une fraction rationnelle.
3. Donner une forme close de R_n et un équivalent asymptotique de R_n quand $n \to +\infty$.

Solution :

1. Soit la dernière bande du rectangle ne contient que que des petits carrés, soit elle contient une équerre. On a donc les possibilités suivantes.



ce qui justifie la formule

2. On a $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 7$ ($R_0 = 1$ pour complÃ©ter la formule). Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+3}x^{n+3} - x\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+2}x^{n+2} - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1}x^{n+1} - 2x^3\sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = 0$$

soit en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n$,

$$(S(x) - 1 - x - 5x^2) - x(S(x) - 1 - x) - 4x^2(S(x) - 1) - 2x^3 S(x) = 0$$

$$S(x) = \frac{1}{1 - x - 4x^2 - 2x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-2x-2x^2)} =$$

3. Un calcul un peu long montre que

$$S(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

D'où

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\sqrt{3})^n$$

On a ainsi

$$R_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3}(1-\sqrt{3})^n$$

De plus asymptotiquement, comme $|1-\sqrt{3}| < 1$ et $1+\sqrt{3} > 1$,

$$R_n \sim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^n.$$

Exercice 6.7. Montrez que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels positifs, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \geq (\sum_i x_i/n)^3$.

Montrer qu'il existe une constante c telle que si un graphe G avec n sommets ne contient pas $K_{3,3}$ comme sous-graphe, alors G a au plus $cn^{5/3}$ arêtes. (Indice : Utiliser la même approche que dans la preuve du théorème 6.14)

Solution 6.7.

1. Le premier point provient de la convexité de $x \mapsto x^3$ dont on peut s'assurer en vérifiant que la dérivée seconde est positive. Rappelons qu'une fonction est convexe ssi pour tous $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

2. Notons V l'ensemble des arretes de G. Considérons une matrice avec $\binom{n}{3}$ lignes et n colones dans laquelles les lignes sont indicées par des sous-ensembles de cardinal 3 de V et les colonnes par des éléments de V. Dans la ligne $\{v_1, v_2, v_3\}$ et la colonne u, inscrivons la valeur 1 dans la matrice si u est connecté à v_1, v_2 et v_3 ; sinon mettons-y un 0. A présent calculons le nombre M de 1 dans cette matrice. Chaque ligne de cette matrice ne peut avoir qu'au plus 2 uns, puisque le graphe ne contient pas $K_{3,3}$, donc $M \leq 2\binom{n}{3}$. D'autre part, la colonne correspondant à $u \in V$ possède $\binom{\deg(u)}{3}$ uns, le nombre d'ensembles u à trois éléments qui lui sont reliés. Soient $d_1, \ldots, d_n$ les degrés des sommets de V. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{3} = M \leq 2\binom{n}{3}.$$

En majorant $\binom{n}{3}$ par $n^3/6$ et en minorant $\binom{d_i}{3}$ par $(d_i - 2)^3/6$, ceci montre que

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - 2)^3 \leq 2n^3 .$$

Mais en développant le terme à gauche, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^3 \leq 2n^3 + 6\sum_i d_i^2 - 12\sum_i d_i + 8.$$

Or $\sum_i d_i^2$ est majoré par $n(n-1)^2$ puisque $d_i \leq n - 1$. On a donc pour une constante c assez grande,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^3 \leq cn^3$$

Utilisons à présent la première question. On obtient $\sum_{i=1}^{n} d_i^3 \geq n\left(\frac{s}{n}\right)^3$ avec $s = \sum_i d_i$ ou encore $s = 2m$ où m est le nombre d'arètes dans G. Ainsi, $8m^3/n^2 \leq cn^3$ et finalement $m \leq (c/8)^{1/3} n^{5/3}$.