Exercice R1.1. Lorsque R est un anneau, on appelle *série formelle* et on note $R[[x]]$ l'ensemble des suites à valeurs dans R que l'on représente sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ($a_n \in R$).

Soient $R_0 = \mathbb{Z}$ et, pour tout $i \geq 1$, $R_i = R_{i-1}[[x_i]]$. Pour quelles valeurs de i, l'anneau R_i est-il dénombrable ? Justifier.

Solution R1.1.

1. $R_0 = \mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. $R_1 = Z[[x_1]]$ est en réalité isomorphe à l'ensemble $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\mathbb{Z}$ et contient à ce titre l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites de zéros et de uns. On peut aussi voir ce fait en considérant les séries formelles de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n x^n$ avec $\epsilon_n \in \{0, 1\}$ pour tout entier n. Il a été établi en cours que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est infini non dénombrable, donc R_1 n'est pas dénombrable.
3. Pour $i \geq 1$, R_i est toujours inclus dans R_{i+1} (il s'agit par exemple des constantes de R_{i+1}). Comme R_1 n'est déjà pas dénombrable, les R_i ne sont pas dénombrables pour tout $i \geq 1$.

Exercice R1.2. On considère l'ensemble des nombres réels $\mathcal{R}$ et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\mathcal{R})$. On définit une relation ϕ sur $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{R}), \qquad A \sim_\phi B \text{ si } (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ est dénombrable.}$$

Montrez que ϕ est une relation d'équivalence.

Solution R1.2. Réflexivité : Lorsque $A = B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est l'ensemble vide, qui est dénombrable.
Symétrie : L'expression $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est symétrique en A et B, donc la relation ϕ est symétrique.
Transitivité : Si $A \sim_\phi B$, $B \sim_\phi C$, alors $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \setminus B$ et $B \setminus C$ sont tous dénombrables (en tant que sous-ensembles d'ensembles dénombrables). On remarque que $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. En effet, soit $x \in A \setminus C$. Deux cas sont possibles : si $x \in B$, alors $x \in B \setminus C$, si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$. On en déduit que $A \setminus C$ est dénombrable, car l'union de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Il en va de même pour $C \setminus A$.

D'où $A \sim_\phi C$.

Exercice R1.3. Soit $(X, \leq)$ un poset et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on note $A \ll B$ la relation

$$A \ll B \quad \text{si} \quad \forall a \in A, \exists b \in B, \qquad a \leq b.$$

Montrez que quand $A \ll B$ et $B \ll A$, A et B possèdent le même ensemble d'éléments maximaux.

Solution R1.3. Soit a un élément maximal de A, montrons que a appartient à B et que a est un élément maximal de B.

Par hypothèse, comme $A \ll B$, il existe $b \in B$ tel que $a \leq b$. De plus comme $B \ll A$, il existe $\alpha \in A$ tel que $b \leq \alpha$. Ainsi par transitivité $a \leq b \leq \alpha$. Mais a est un élément maximal, donc $a = \alpha$. Par antisymétrie, on conclut que $a = b$. Donc a appartient bien à B. Mais alors on vient de voir que tout majorant dans B de a est égal à a lui-même. Donc a est bien maximal dans B.

Le problème étant symétrique en A et B, on montre de même que les éléments maximaux de B sont inclus dans l'ensemble des éléments maximaux de A, ce qui conclut l'exercice.

Exercice R1.4. On définit cinq plans de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ par les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} H_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+5z=0\}, \\ H_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}, \\ H_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+4z=0\}, \\ H_4 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+3y+9z=0\}, \\ H_5 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y+5z=0\}. \end{array}$$

Soit $P = \{\cap_{i \in I} H_i \mid I \subseteq \{1,\ldots,5\}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P} = (P, \subseteq)$ est un treillis possédant un unique élément minimal $\{0\}$ et un unique élément maximal $\mathbb{R}^3$.
2. Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathbb{P}$.
3. Calculer $\mu(\{0\}, x)$ pour tout $x \in P$.