ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Section d'Informatique et de Systèmes de Communication

Corrigé de la série 4 17 Octobre 2011

1. Matrices d'adjacence et listes d'adjacence

a) Les matrices d'adjacence pour les graphes à gauche en haut, à droite en haut, à gauche en bas, et à droite en bas sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Les listes d'adjacence des graphes sont respectivement,

$$\begin{array}{rl} 1: & \{2,7\}\\ 2: & \{1,3,6,7\}\\ 3: & \{2,4,6,7\}\\ 4: & \{3,5\}\\ 5: & \{4,6\}\\ 6: & \{2,3,5,7\}\\ 7: & \{1,2,3,6\} \end{array}, \quad \begin{array}{rl} 1: & \{2\}\\ 2: & \{1,4\}\\ 3: & \{4\}\\ 4: & \{2,3,5\}\\ 5: & \{4,6,7\}\\ 6: & \{5\}\\ 7: & \{5,8,9\}\\ 8: & \{7,9\}\\ 9: & \{7,8,10\}\\ 10: & \{9\} \end{array},$$

$$\begin{array}{rl} 1: & \{2,4,8\}\\ 2: & \{1,3,7\}\\ 3: & \{2,4,6\}\\ 4: & \{1,3,5\}\\ 5: & \{4,6,8\}\\ 6: & \{3,5,7\}\\ 7: & \{2,6,8\}\\ 8: & \{1,5,7\} \end{array}, \quad \begin{array}{rl} 1: & \{2,4\}\\ 2: & \{3,4\}\\ 3: & \{5\}\\ 4: & \{5\}\\ 5: & \{1\} \end{array}.$$

b) La somme d'une ligne de la matrice d'adjacence est le nombre d'arêtes (sortant) du sommet associé à la ligne.

On peut formuler cette preuve autrement: La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique, et a des zeros dans sa diagonale. Le triangle au dessus de la diagonale a autant de 1's que le triangle en dessous de la diangonale (symétrique), disons a. Le nombre total de 1's dans la matrice est donc égal à $2a$, et est donc pair. Or, une matrice 5×5 avec 3 1's dans chaque ligne aura exactement 15 1's. Mais 15 n'est pas pair, on a donc une contradiction.

c) Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets. Nous posons $B := A^2$ et écrivons b_{ij} la composante qui se trouve à la position (i, j) de B, et a_{ij} la composante (i, j) de A. Alors,

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} a_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i\ell} = 1 \text{ et } a_{\ell j} = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \begin{cases} 1 & \text{s'il y a une arête } i \to \ell \text{ et une arête } \ell \to j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \begin{cases} 1 & \text{s'il y a le chemin } i \to \ell \to j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \#\{\text{chemins } i \to j \text{ de longueur 2 dans le graphe}\}. \end{aligned}$$

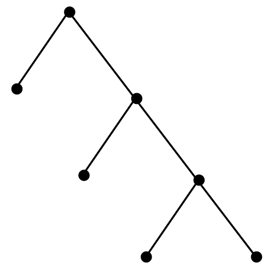
Le dernier pas ci-dessus suit du fait que chaque chemin de longueur 2 possède un unique sommet intermédiaire ℓ et que d'autre part le sommet intermédiaire détermine uniquement le chemin correspondant.

2. Graphes

a) Si la première ligne de la matrice d'adjacence de G ne contient que des 1, alors le sommet x correspondant à cette ligne est connecté à tous les autres sommets du graphe. Le graphe est donc bien connexe puisqu'il y a un chemin entre toutes paires (y, z) de sommets de G (un chemin de longueur 1 si $x \in \{y, z\}$, sinon un chemin de longueur 2 qui passe par x).

b) Attention de ne pas confondre le *degré* d'un sommet (le nombre de fils) et le *facteur d'équilibre* (la différence entre les hauteurs de ses sous-arbres).

On peut prendre par exemple le graphe ci-dessous:



Tous les sommets ont degré 0 ou 2, pourtant la racine a comme facteur d'équilibre -2.

c) • La plus grande hauteur que peut avoir T est $n - 1$. On peut le montrer très facilement par induction.

• La plus petite hauteur que peut avoir T est $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Nous avons en effet montré dans la série précédente (exercice 4f) que si T est un arbre de hauteur h avec n sommets alors

$$n \leq 2^{h+1} - 1.$$

En manipulant cette inégalité nous avons:

$$\begin{aligned} n \leq 2^{h+1} - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad n + 1 \leq 2^{h+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_2(n+1) \leq h + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad h \geq \log_2(n+1) - 1, \end{aligned}$$

ainsi la plus petite hauteur que peut avoir h est

$$\lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil .$$

On peut ensuite montrer que $\lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

d) Comptons plutôt le nombre de "demi-arêtes": Chacun des n sommets est connecté a d arêtes, il y a donc nd demi-arêtes (une demi arête n'est connectée qu'à un seul sommet). Puisqu'on a 2 demi-arêtes par arête, il doit y avoir un total de $\frac{nd}{2}$ arêtes.

Donc nd doit être divisible par 2 (le nombre d'arêtes est clairement un entier). Or si n et d sont impairs alors nd sera aussi impair. On en déduit que si n est impair alors est d doit être pair.

Une autre façon (très similaire) de procéder serait de regarder la matrice d'adjacence A de G. Dans chaque ligne, exactement d entrées ont comme valeur 1 (et $(n - d)$ entrées ont comme valeur 0). Ainsi comme il y a n lignes, le nombre total de 1's dans A est nd. Nous savons de plus les éléments sur la diagonale valent tous 0 (par hypothèse). Ces nd 1's se trouvent donc soit au dessus, soit en dessous de la diagonale.

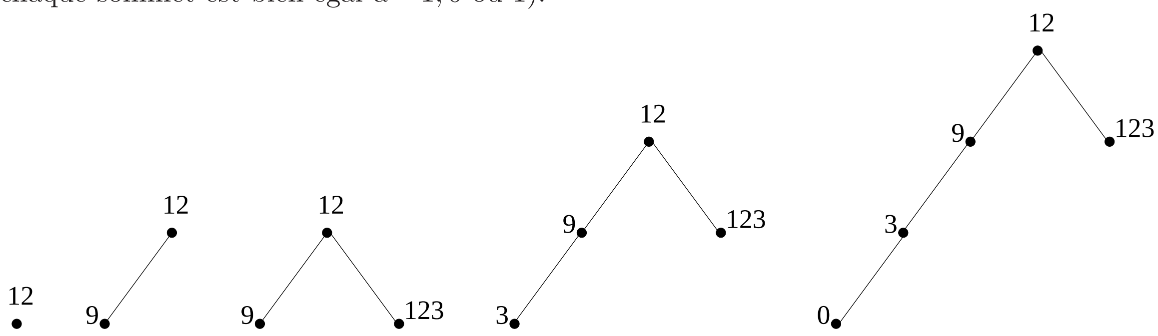
Soit x le nombre de 1's au dessus de la diagonale et y le nombre de 1's en dessous de la diagonale (donc $x + y = nd$). Puisque G est non orienté, A est symétrique et donc $x = y$. Ainsi on a

$$nd = 2x,$$

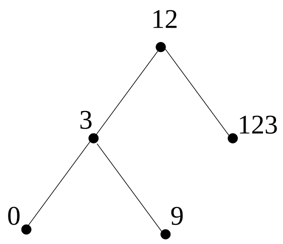
et donc nd doit être pair. Or si n et d sont impairs alors nd sera aussi impair. On en déduit que si n est impair alors est d doit être pair.

3. Arbres AVL

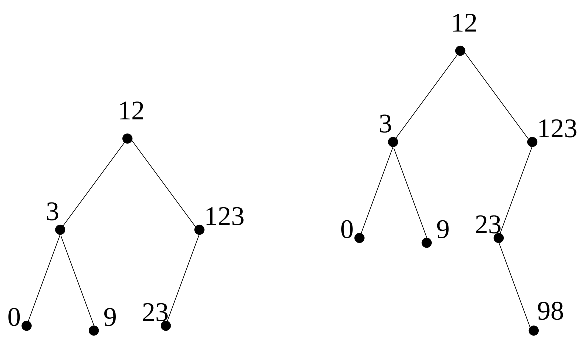
On commence par ajouter les sommets un par un, comme décrit dans le cours. Après avoir ajouté chaque sommet on vérifie que l'arbre reste AVL (c'est à dire que le facteur d'équilibre de chaque sommet est bien égal à $-1, 0$ ou 1):



On voit à present que notre arbre n'est plus AVL puisque le facteur d'équilibre du sommet 9 vaut $+2$. Il faut donc effectuer une rotation pour le rééquilibrer:

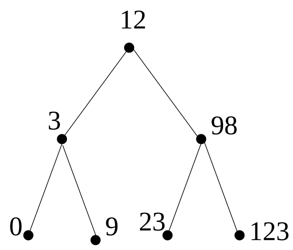


On continue à ajouter les sommets un par un, en vérifiant bien à chaque étape que notre arbre reste bien AVL:

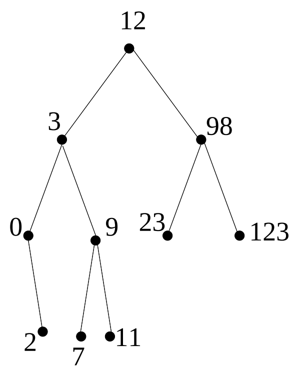


Ce dernier arbre n'est pas AVL puisque le facteur d'équilibre du sommet 123 vaut $+2$.

On effectue de nouveau une rotation:



Finalement, on ajoute les autres sommets un par un, et on voit que l'arbre reste AVL à chaque étape, aucune rotation n'est donc ncessaire:



4. Hashing

a) Nous ne dessinons pas les tables entières ici. Pour h_1 on obtient le table de hachage suivant:

h_1	contenu
0	Alfio, Amel, Amin, Anthony, Antoine
1	Bernard, Boris
$\vdots$	$\vdots$
25	

Le table pour h_2 a la forme suivante:

h_2	contenu
0	
1	Jose
$\vdots$	$\vdots$
25	Manuel

b) La fonction h_2 est meilleure que h_1; en effet une bonne fonction de hachage doit remplir chaque entrée du tableau correspondant avec approximativement la même probabilité, afin d'éviter de longues chaînes dans les entrées du tableau. (Rappelons que la recherche dans un tableau de hachage se fait en d'abord calculant la valeur de la clé et en parcourant ensuite la liste liée de l'entrée correspondante. Le hash n'est performant que si cette liste est courte en général.)

Nous voyons que h_1 donne beaucoup de listes longues; notamment la case 9 contient les 6 entrées { Jean-Marie, Jacques, Jean-Franęois, John, Jose, Joachim }, et la case 0 contient aussi 5 entrées. En revanche, pour h_2, les listes sont en général plus courtes, le maximum dans ce cas est atteint par la case 9 qui contient 4 entrées.

c) D'une part, il est clair que h_1 ne peut pas être une très bonne fonction de hachage, parce que les premières lettres de prénoms n'ont pas du tout la même probabilité. En effet certains lettres apparaissent beaucoup plus souvent.

La fonction h_2 utilise aussi la valeur de la troisième lettre, ce qui ajoute plus de "hasard" aux adresses de hachage obtenues.