ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Section d'Informatique et de Systèmes de Communication

Corrigé de la série 9 21 November 2011

1. Application de QuickSort *et* HeapSort

a) **Suite originale:** Le pivot est 48. On a un pointeur p qui commence a droite de la liste, qu'on déplace vers la gauche en s'arrêtant dès qu'on arrive à un élément plus petit que le pivot. De même on a un pointeur q qui commence à gauche et qu'on déplace vers la droite en s'arrêtant dès qu'il arrive à un élément plus grand que le pivot.

Ainsi p va d'abord s'arrêter à 10, q à 84. On échange ces deux éléments. Puis on continue, p s'arrête à 1, q à 58, on échange c es deux éléments etc. Lorsque p et q sont arrêteś et se sont croisés on a fini la première étape. On inverse le pivot avec l'élément vers lequel pointe q. Et on divise notre suite en deux sous-suites: la première consiste en tous les éléments à gauche du pivot (ils sont tous plus petits que lui par construction), et la deuxième consiste en tous les éléments à droite du pivot (il sont tous plus grands par construction). On applique ensuite QuickSort récursivement à ces deux sous-suites.

Dans notre cas les éléments suivants sont donc échangés:

$$10-84, 1-58, 10-81, 4-49, 10-91, 33-89$$

Quand p et q se sont croisés, q pointe vers 63. On échange donc 48 (le pivot) et 63. Et on coupe la suite en deux sous-suites: les éléments à gauche et à droite de 48

Sous-suite de gauche: La suite à gauche de 48. C'est la suite suivante:

$$23, 29, 10, 15, 1, 19, 10, 17, 48, 15, 36, 4, 10, 26, 33, 22$$

On prend 22 comme pivot, et comme ci-dessus on échange les éléments suivants:

$$10-23, 4-29, 15-48$$

Quand p et q s'arrêtent et se sont croisés, q pointe vers 48. On échange donc 48 avec 22 (le pivot), et on a deux sous suites:

$$10, 4, 10, 15, 1, 19, 10, 17, 15 \qquad \text{(à gauche de 22)}$$

$$36, 29, 23, 26, 33, 48 \qquad \text{(à droite de 22)}$$

On va donc appliquer QuickSort à ces deux sous suites (avec comme pivots 15 et 48). etc...

Sous-suite de droite: La suite à droite de 48:

$$57, 89, 91, 50, 56, 85, 49, 81, 63, 58, 72, 84, 63$$

Le pivot est 63, on échange les éléments suivants:

$$58 - 89, 49 - 91$$

Quand p et q se sont croisés q pointe vers 85. On échange donc 85 avec le pivot et se retrouve avec deux sous-suites:

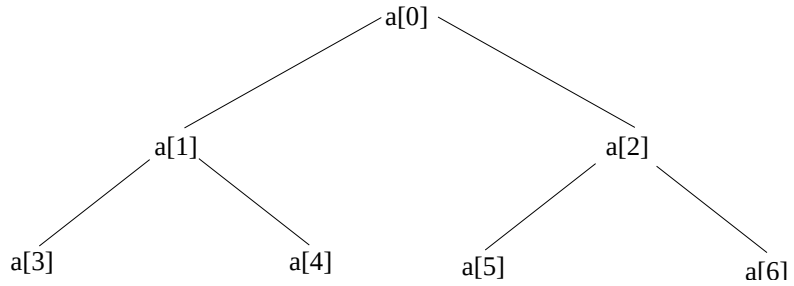
$$57, 58, 49, 50, 56 \qquad \text{(à gauche de 63)}$$

$$91, 81, 63, 89, 72, 84, 85 \qquad \text{(à droite de 63)}$$

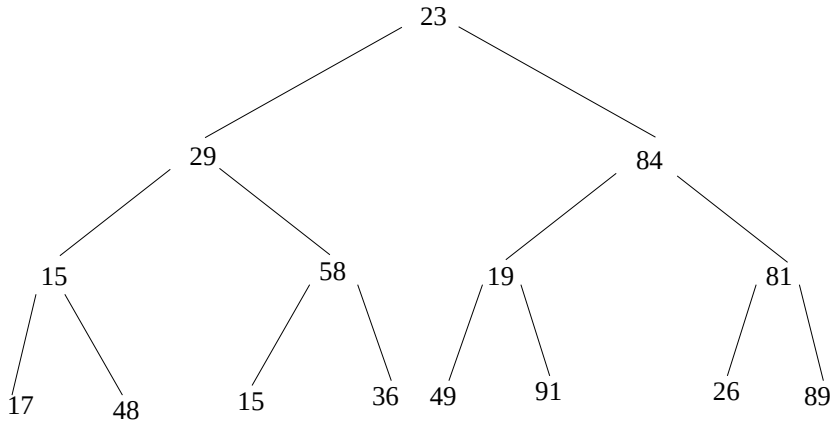
On va donc trier chacune de ces sous suites avec QuickSort, les pivots seront donc 56 et 85.

...etc...

b) On rappelle qu'on représente une suite $a[0], \ldots, a[N-1]$ par un arbre en prenant $a[0]$ comme racine, puis $a[1]$ et $a[2]$ pour ses deux fils, et en général $a[2i+1]$ et $a[2i+2]$ pour les deux fils de $a[i]$, comme suit:



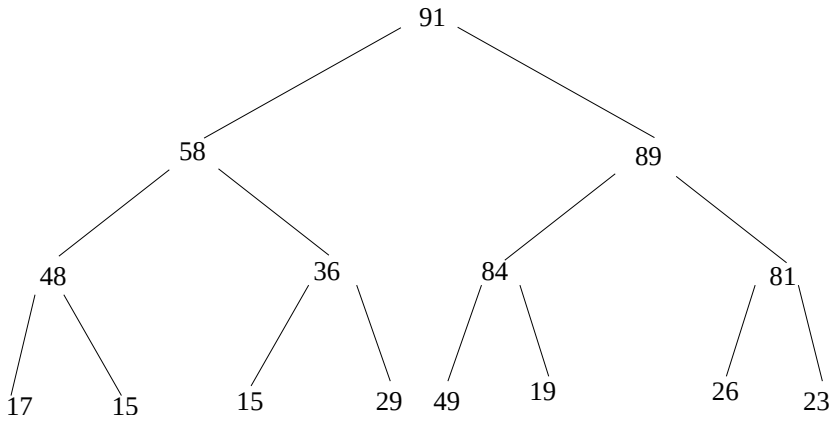
Si on représente notre suite par un arbre, elle est dans l'état initial suivant:



Il faut d'abord transformer cette suite en heap. On utilise BottomUpHeapCreate. On va donc faire des opérations de sift down (sur les éléments $a[6], a[5], \ldots, a[0]$, donc $81, 19, \ldots, 23$ puisque les autres sont déjà "en bas" de l'arbre):

- Sift down de 81: échanger 81 et 89
- Sift down de 19: échanger 19 et 91
- Sift down de 58: rien
- Sift down de 15: échanger 15 et 48
- Sift down de 84: échanger 84 et 91
- Sift down de 29: échanger 29 et 58, échanger 29 et 36
- Sift down de 23: échanger 23 et 91, échanger 23 et 89, échanger 23 et 81

Ainsi on se retrouve avec le heap suivant:



on voit que c'est bien un heap puisque chaque sommet est plus grand que ses deux fils.

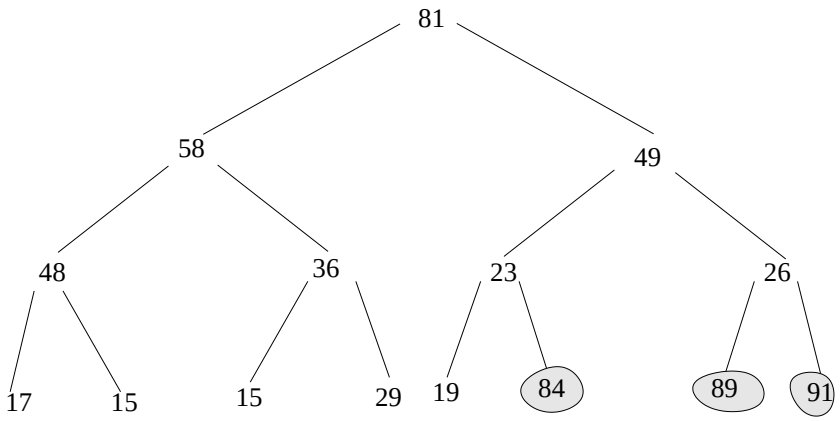
Nous pouvons donc procéder avec l'algorithme heap sort:

- On échange 23 et 91. On ne touche plus à 91, puisqu'on sait que c'est le plus grand élément il est donc à sa place à la fin de la liste. On fait ensuite un sift down de 23 (mais sans toucher à 91): échanger 23 et 89, échanger 23 et 84, échanger 23 et 49.

- On échange 26 et 89. De même on ne touche plus à 89 ou 91 puisque ce sont les deux plus grands éléments de la liste, ils sont donc à leur place. On fait un sift down de 26: échanger 26 et 84, échanger 26 et 81.

- On échange 19 et 84. On fait un sift down de 19 sans toucher à 84, 89 et 91: échanger 19 et 81, échanger 19 et 49, échanger 19 et 23.

Notre liste est à présent la suivante:



Les éléments 84, 89 et 91 sont les plus grands éléments de la suite, ils sont donc a leur place on ne va plus les toucher. On continue de la même façon:

• On échange 19 et 81. On fait un sift down de 19 sans toucher à 81, 84, 89 et 91: échanger 19 et 58, échanger 19 et 48

• etc...

2. Dégénérescence de QuickSort

a) Si la suite est déjà triée, le pivot sera à chaque fois le plus grand élément. La suite sera donc coupée en une suite vide (à droite) et une suite consistant en tous les éléments sauf le pivot (à gauche). Il faudra donc faire $N-1$ étapes qui nécessiteront $1, \ldots, N-1$ comparaisons, donc au total $\Omega(N^2)$.

b) Il s'agit à nouveau de construire des suites de sorte que le pivot soit fréquemment un élément très grand (ou très petit) de la suite. Cette stratégie empêche qu'on puisse arranger la suite de sorte que le pivot soit le plus grand élément de la suite, mais c'est toujours possible que ça soit le deuxième plus grand élément.

Supposons que les clés sont les nombres $0, 1, \ldots, N-1$, et que N est pair. Alors l'arrangement

$$0, *, \cdots, *, (N-1), *, \cdots, *, a, (N-2),$$

(où le "$(N-1)$" se trouve à la position $N/2$, et les "$*$" dénotent n'importe quelle clé), fait que l'algorithme choisit $(N-2)$ comme pivot, puisque c'est la médiane de $(0, N-1, N-2)$. Après le premier pas de partitionnement de QuickSort on aura

$$\underline{0, *, \cdots, *, a, *, \cdots, *}, (N-2), (N-1),$$

où les $*$ n'ont pas changé de position. (Remarquons que QuickSort effectue $N-2$ comparaisons pour arriver à cette étape.)

On veut que le comportement pathologique ci-dessus se répète: pour y arriver, on peut disposer les éléments dans la sous-suite soulignée ci-dessus de manière analogue, i.e., positionner $(N-3)$ au milieu et $(N-4)$ tout à droite. Donc l'arrangement

$$0, *, \cdots, *, N-3, N-1, *, \cdots, *, N-4, *, N-2$$

fait que les deux premières itérations exhiberont un comportement pathologique.

En répétant la construction, on peut s'arranger pour que les premières $\lfloor N/4 \rfloor$ itérations seront de ce genre:

$$0, *, \cdots, N - \frac{2N}{4} - 1, \cdots, N-3, N-1, \cdots, *, N - \frac{2N}{4}, *, N - \frac{2N}{4} + 2, *, \cdots, N-4, *, N-2.$$

Pour effectuer chacune de ces itérations, $\geq N/2$ comparaisons sont nécessaires, donc au total $\geq N/4 \cdot N/2 = \Omega(N^2)$ comparaisons.

Remarque: Comme il n'était pas précisé que les éléments de la suite doivent être *distincts*, on peut trouver une solution bien plus simple: Si tous les éléments sont égaux ($a[0] = \ldots = a[N-1]$) il faudra $\Omega(N^2)$ comparaisons.

En effet, à chaque passage le pointeur p ne s'arrêtera que lorsqu'il arrivera au début de la suite (la position ℓ dans l'algorithme du cours), alors que q ne s'arrêtera qu'à la position $r-1$. Ainsi la sous-suite de droite sera toujours vide. Il faudra donc faire un passage de QuickSort sur une suite de taille N, puis $N-1$, puis $N-2$, etc... Comme chaque passage nécessite $\Omega(N)$ comparaisons, il faudra $\Omega(N^2)$ comparaisons au total.

3. Traverser des graphes

a) 1,12,4,6,9,10,11,3,2,5,8,7 (cette solution n'est pas unique, puisque l'algorithme n'est pas deterministe).

b) 1,12,5,8,4,7,6,2,9,10,11,3 (cette solution n'est pas unique).

• On commence par mettre 1 dans la queue Q.
• On ajoute tous ses voisins non-marqués à Q: 12, 5, 8 (qu'on marque aussi dans cet ordre). On a donc $Q = (1, 12, 5, 8)$.
• On fait dequeue, on a donc: $Q = (12, 5, 8)$.
• On prend le premier élément de Q: 12. On ajoute tous ses voisins non marqués: 4 (on marque aussi 4). On a donc $Q = (12, 5, 8, 4)$.
• On fait dequeue, on a donc: $Q = (5, 8, 4)$.
• On prend le premier élément de Q: 5. On ajoute tous ses voisins non marqués à Q: il n'y en a pas.
• On fait dequeue, donc $Q = (8, 4)$.
• On prend le premier élément de Q: 8. On ajoute tous ses voisins non marqués à Q: 7. On a donc $Q = (8, 4, 7)$.
• Dequeue, donc $Q = (4, 7)$.
• On prend le premier élément de Q: 4. On ajoute tous ses voisins non marqués à Q: 6, 2. On a donc $Q = (4, 7, 6, 2)$.
• Dequeue, donc $Q = (7, 6, 2)$.
• On ajoute tous les voisins non marqués de 7 à Q: 9, 10. On a donc $Q = (7, 6, 2, 9, 10)$.
• Dequeue, donc $Q = (6, 2, 9, 10)$.
• On ajoute tous les voisins non marqués de 6 à Q: aucun.
• Dequeue, donc $Q = (2, 9, 10)$.

- On ajoute tous les voisins non marqués de 2 à Q: aucun.
- Dequeue, donc $Q = (9, 10)$.
- On ajoute tous les voisins non marqués de 9 à Q: aucun.
- ...etc...

c) Nous modifions BFS comme suit (les nouvelles lignes sont les lignes 3 et 12):

Call: BFSDist(G, s)
Input: Graphe $G = (V, E)$, sommet $s \in V$.
Output: Associer à chaque sommet v une valeur $v.dist$ qui représente la distance de s à v.

```
1:  Enqueue(Q, s)
2:  Marquer s
3:  s.dist ← 0
4:  while Not QueueEmpty(Q) do
5:    v ← Head(Q)
6:    while N[v] ≠ ∅ do
7:      Choisir v' ∈ N[v]
8:      N[v] ← N[v] \ {v'}
9:      if v' n'est pas marqué then
10:       Enqueue(Q, v')
11:       Marquer v'
12:       v'.dist ← v.dist + 1
13:     end if
14:   end while
15:   Dequeue(Q)
16: end while
```

d) Nous voulons le nombre de sommets atteignables depuis s. Nous supposons que s lui-même est atteignable depuis s, nous voulons donc la taille de la composante connexe de s. Nous modifions AbstractTraversal comme suit (les nouvelles lignes sont 3,12 et 17):

Call: AbstractTraversalCount(G, s)
Input: Graphe $G = (V, E)$, sommet $s \in V$.
Output: Le nombre de sommets atteignables depuis s.

```
1:  Q ← {s}.
2:  Marquer s.
3:  count ← 1
4:  while Q ≠ ∅ do
5:    Choisir v ∈ Q.
6:    while N[v] ≠ ∅ do
7:      Choisir v' ∈ N[v]
8:      N[v] ← N[v] \ {v'}
9:      if v' n'est pas marqué then
10:       Q ← Q ∪ {v'}
11:       Marquer v'
```

```
12:           count ← count + 1
13:       end if
14:     end while
15:     Q ← Q \ {v}
16: end while
17: return count
```

En effet, il suffit de compter le nombre de sommets qui sont visités lors d'un parcours du graphe commençant à 1.

4. Priority Queues

a) Ce sont les 15 arrangement suivants:

$$\begin{array}{lll} (4,2,5,1,3), & (4,1,5,3,2), & (4,3,5,1,2), \\ (5,3,4,1,2), & (5,2,4,1,3), & (5,1,4,3,2), \\ (3,5,4,1,2), & (1,5,4,3,2), & (2,5,4,1,3), \\ (1,3,4,5,2), & (2,1,4,5,3), & (3,1,4,5,2), \\ (1,2,4,3,5), & (3,2,4,1,5), & (2,3,4,1,5) \end{array}$$

b) L'idée est de mémoriser dans la queue de priorité les non-premiers et de ainsi simuler un crible d'Erastosthène. On peut alors successivement tester si un nombre donné est premier en testant s'il est le prochain élément dans la queue de priorité. Une première version de cet algorithme serait alors la suivante. (Dans l'algorithme suivant, H est une queue de priorité stockant des entiers, et tel que l'élément prioritaire $\top[H]$ est toujours l'élément le plus petit.

Input: Un entier N indiquant la fin de la queue de priorité
Output: Une suite croissante de tous les premiers entre 1 et N

```
H ← {4, 6, 8, ..., ⌊N/2⌋ · 2}
print 2
i ← 3
while i ≤ N do
  x ← ⊤[H]
  if x > i then
    for j = 2 · i, 3 · i, ..., ⌊N/i⌋ · i do
      H ← H ∪ {j}
    print i
  else
    while x = i do
      pop(H)
      x ← ⊤[H]
  i ← i + 1
```

Le désavantage de cette solution est qu'il est très couteux de stocker tous les multiples d'un premier dans la queue de priorité. Une petite refléxion montre qu'il suffit de stocker le prochain multiple d'un premier donné si l'on sait de quel premier c'est

un multiple: à chaque fois qu'un tel nombre est enlevé de la queue de priorité, il suffit de rajouter le prochain multiple du même premier dans la queue. Pour pouvoir le faire, il faut stocker des couples (x, p), où p est le premier en question est x est son prochain multiple. L'algorithme suivant réalise cet approche avec deux modifications en plus: Les nombres pairs ne sont pas considérés, et les premiers $> \sqrt{N}$ ne sont pas inserés dans la queue puisque les nombres composés $\leq N$ ont toujours un facteur $\leq \sqrt{N}$.

Input: Un entier N indiquant la fin de la queue de priorité
Output: Une suite croissante de tous les premiers entre 1 et N

$H \leftarrow \{(9, 3)\}$
print 2
print 3
for $i = 3, 5, 7, 9, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor \cdot 2$ **do**
  $(x, p) \leftarrow \top[H]$
  if $x > i$ **then**
    print i
    if $i \leq \sqrt{N}$ **then**
      $H \leftarrow H \cup \{(3 \cdot i, i)\}$
  else
    while $x = i$ **do**
      pop(H)
      $H \leftarrow H \cup \{(i + 2p, p)\}$
      $(x, p) \leftarrow \top[H]$

c) L'opération SiftUp réalise le cœur d'une insertion: il suffit d'ajouter l'élément à la fin et de faire un SiftUp par la suite:

Input: Un heap (a, N), où a est un tableau, et N le nombre d'éléments dans le heap. Un élément e à insérer.
Output: (a, N) modifiés.

$a[N] \leftarrow e$
$N \leftarrow N + 1$
SiftUp$(a, N - 1)$

De manière similaire, on peut aussi effacer un élément en utilisant les opérations SiftUp et SiftDown. Néanmoins, la procédure correcte est légèrement plus compliquée que pour une insertion.

Input: Un heap (a, N) et un indice k d'un élément à enlever.
Output: (a, N) modifiés.

$a[k] \leftarrow a[N - 1]$
$N \leftarrow N - 1$
if $k < N$ **then**
  if $a[\lfloor k/2 \rfloor] < a[k]$ **then**
    SiftUp(a, k)
  else
    SiftDown(a, k)