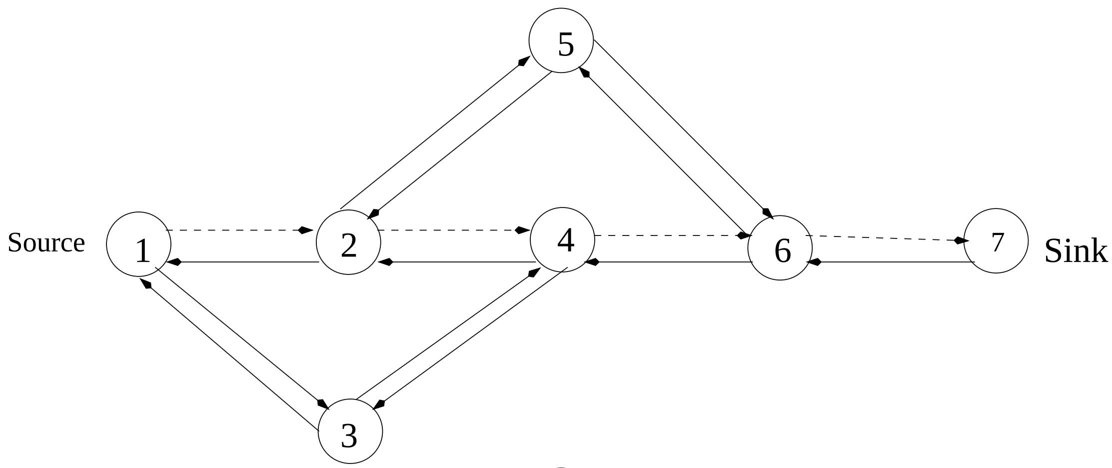
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Section d'Informatique et de Systèmes de Communication

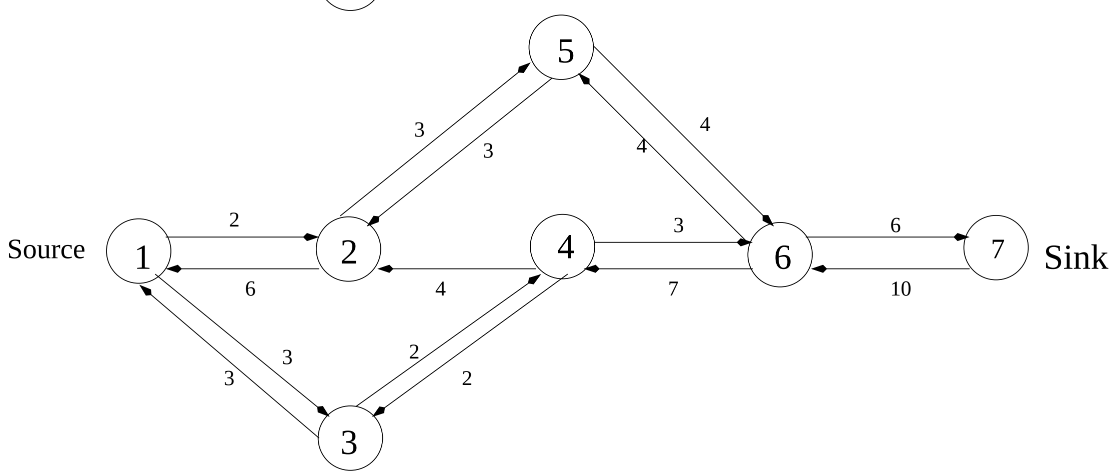
**Corrigé de la série 11** 5 December 2011

### *1. MaxFlowMinCut*

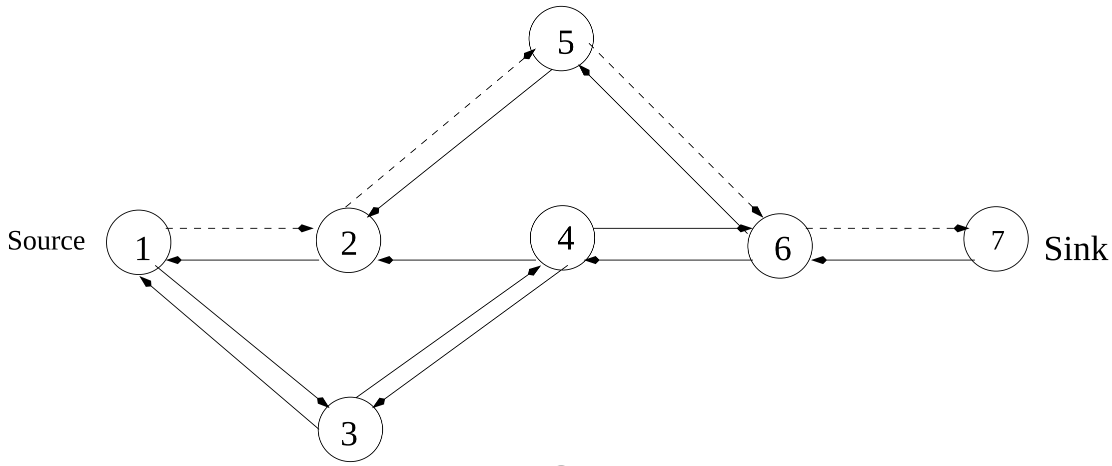
Au début, chaque arête est remplacée par deux arcs de sens opposé et de capacité égale à celle de l'arête de départ.

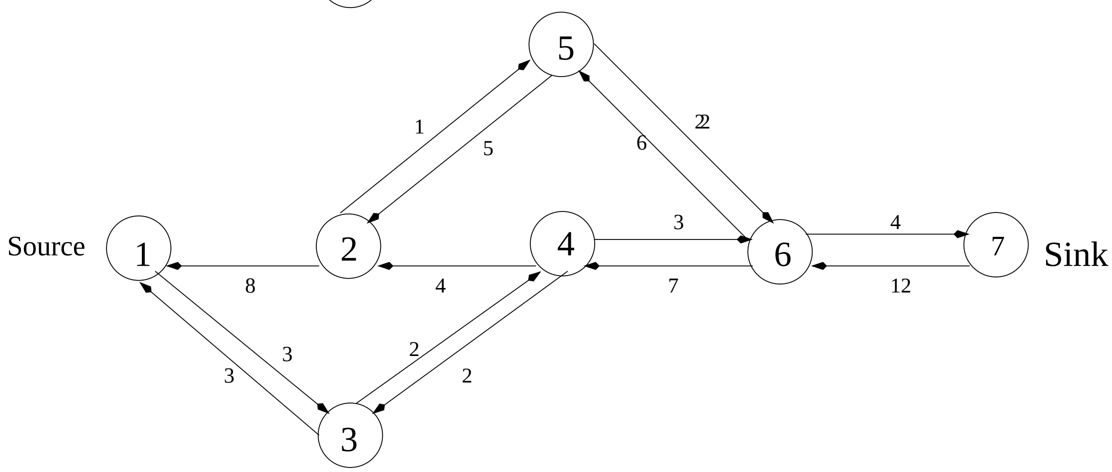
L'algorithme construit un chemin f-augmentant. On augmente le flux de deux unités le long de ce chemin et on met à jour le réseau résiduel. Pour chacune des itérations (dans cet exercice, l'algorithme trouve le flux maximal au bout de 3 itérations), les graphes indiquent le chemin f-augmentant de la source au sink trouvé et le graphe résiduel résultant.



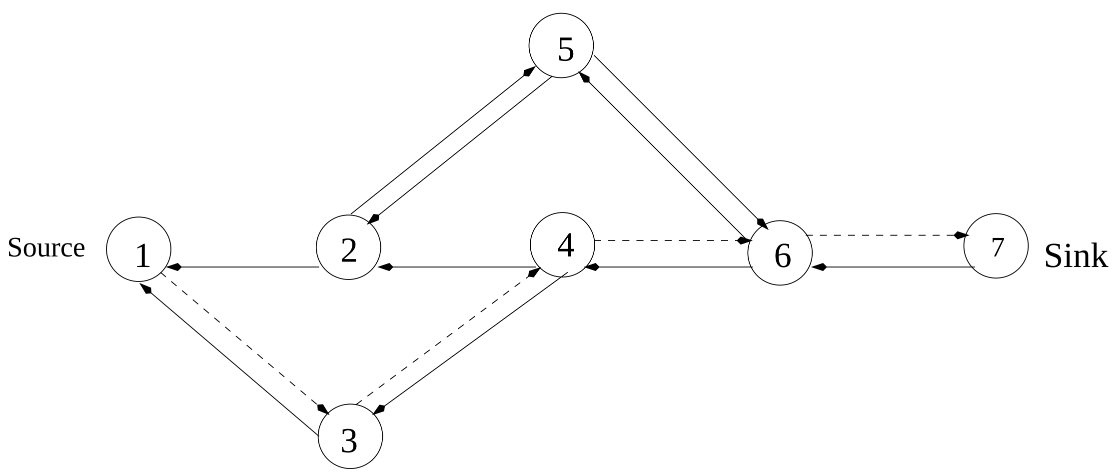



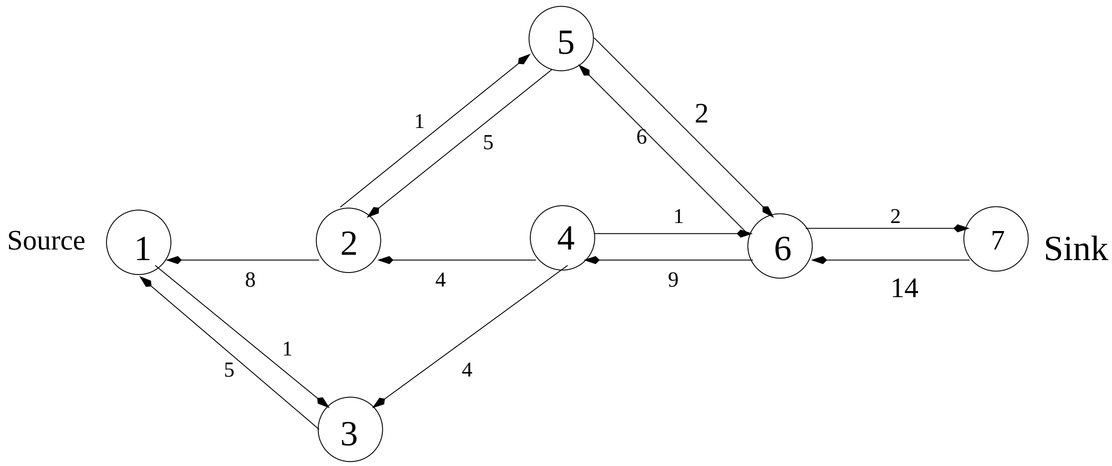

A l'iteration suivante, l'algorithme construit un chemin f-augmentant de la source au sink. On augmente le flux de deux unités le long de ce chemin et on met à jour le graphe résiduel.



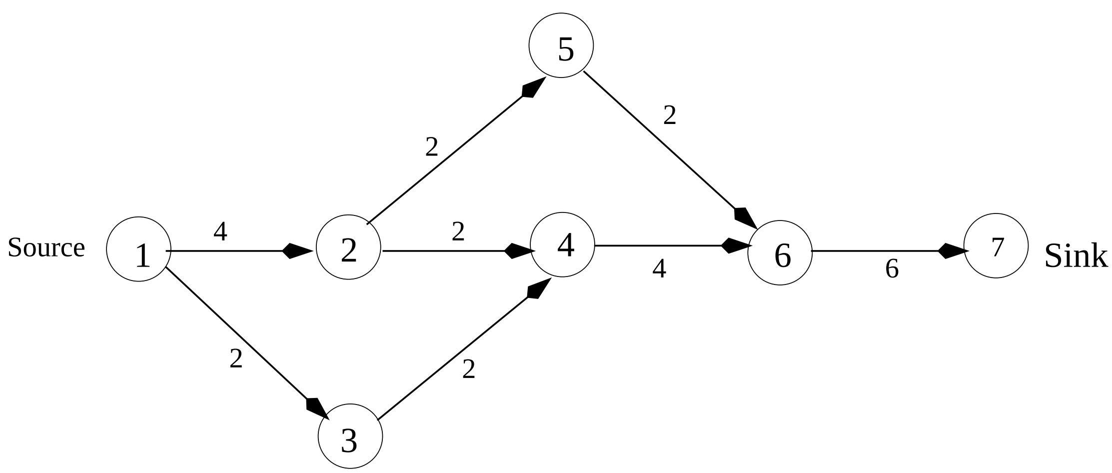




A l'iteration suivante, l'algorithme construit un chemin f-augmentant de la source au sink. On augmente le flux de deux unités le long de ce chemin et on met à jour le réseau résiduel.





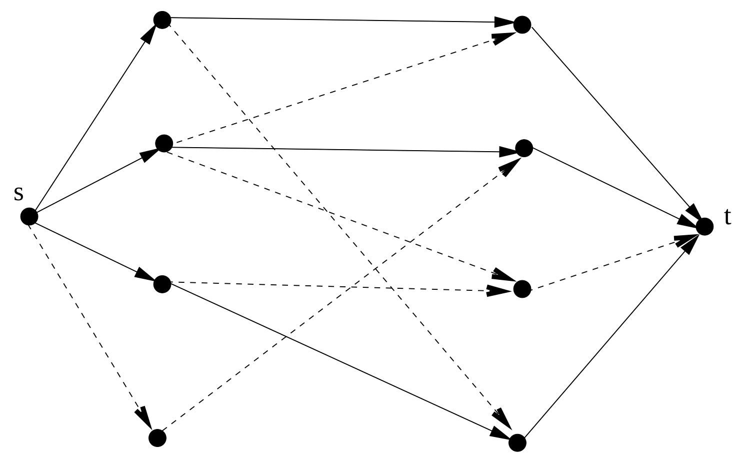

A cette étape de l'algorithme, depuis la source (sommet numeroté *1*), l'on ne peut atteindre que le sommet numeroté *3*. Le cut minimum est S= { 1,3 } de valeur 6. On trouve une solution optimale au problème du flux maximum de valeur 6.




***2. Matching***

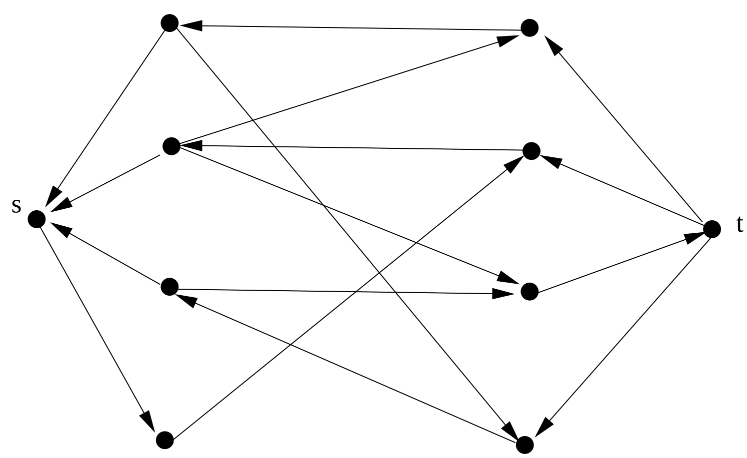
Nous utilisons l'algorithme MaxFlowMinCut comme décrit dans le cours.

Nous ajoutons 2 sommets $s$ et $t$ et transformons le graphe en réseau dans lequel toutes les arêtes ont une capacité de 1. Au matching de l'énnoncé correspond un flux (voir cours), nous dessinons ce flux ci-dessous:

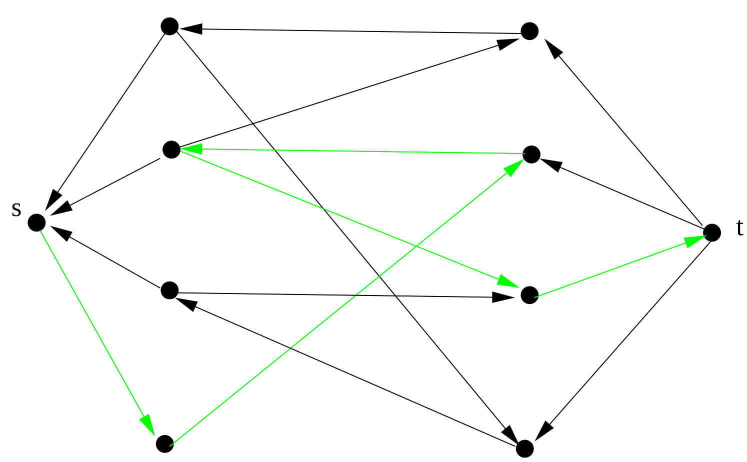



(Toutes les arêtes ont capacité 1, Celles en pointillé ont un flux de 0/1, alors que les autres ont un flux de 1/1). La valeur de ce flux est 3.

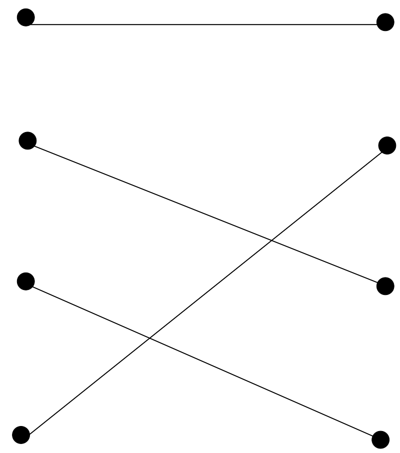
Nous dessinons ensuite le graphe résiduel par rapport à ce flux afin de voir s'il est possible de trouver un chemin augmentant:




Nous prenons le chemin augmentant ci-dessous:



Et obtenons ainsi le matching suivant:



Le matching proposé n'était donc pas maximal.

***3.*** Au début, les trois arêtes horizontales ordonnées de gauche à droite ont les capacités résiduelles 1, 1, $\phi$. Après l'application du chemin augmentant D, les trois arêtes horizontales ont les capacités résiduelles 1, 0, $\phi$. Supposons que les capacités résiduelles sont $\phi^{k-1}$, 0, $\phi^k$. (Notons que ceci est vrai au début pour $k = 1$.)

1. On augmente sur B, on ajoute $\phi^k$ au flux, les capacités résiduelles deviennent $\phi^{k+1}$, $\phi^k$, 0.
2. On augmente sur C, on ajoute $\phi^k$ au flux, les capacités résiduelles deviennent $\phi^{k+1}$, 0, $\phi^k$.
3. On augmente sur B, on ajoute $\phi^{k+1}$ au flux, les capacités résiduelles deviennent 0, $\phi^{k+1}$, $\phi^{k+2}$.
4. On augmente sur A, on ajoute $\phi^{k+1}$ au flux, les capacités résiduelles deviennent $\phi^{k+1}$, 0, $\phi^{k+2}$.

D'où aprés 4n+1 étapes d'augmentation, les capacités résiduelles sont $\phi^{2n}$, 0, $\phi^{2n+1}$. Comme le nombre d'étapes d'augmentation tend vers l'infini, la valeur du flux converge à $1 + 2\sum_{i\geq 1}\phi^i = 1 + 2\phi/(1-\phi)$.

La valeur du flux maximal est 2X+1, car on peut envoyer $X + X$ flux à travers les arêtes de droite et de gauche, et 1 flux à travers l'arête du milieu. Ce flux est optimal puisqu'il n'a pas de chemins augmentants.

On voit donc que la valeur du flux optimal est différente de la valeur retournée par l'algorithme de Ford-Fulkerson.