**Exercice 1.1.** Soient $X$ et $Y$ des ensembles non vides et soit $f\colon X \to Y$ une application. De plus, soient $A, B \subseteq X$ et $C, D \subseteq Y$. Lesquelles des assertions suivantes sont-elles vraies?

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

**Exercice 1.2.** Pour un ensemble $X$, l'ensemble des parties de $X$ est défini par

$$P(X) := \{A \mid A \subseteq X\}\ .$$

(a) Construire une application injective $f\colon X \to P(X)$.

(b) Pour un ensemble fini $X$, montrer que si $g\colon X \to P(X)$, alors $g$ n'est pas surjective.

(c) On considère maintenant un ensemble $X$ qui n'est pas nécessairement fini. Montrer que si $g\colon X \to P(X)$, alors $g$ n'est pas surjective. [Indication: considérer l'ensemble $A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$].

**Exercice 1.3.** Soient $A$ et $B$ deux sous-ensembles d'un ensemble $X$. L'ensemble

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

est appelé la *différence symétrique de $A$ et $B$.* Montrer que

(a) $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.

(b) Si $A\Delta B = A^c$, alors $B = X$.

(c) $A\Delta A = \emptyset$.

(d) Si $C$ est un sous-ensemble de $X$, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$, c'est-à-dire que l'opération $\Delta$ est associative.

(e) L'ensemble $P(X)$ muni de l'opération $\Delta$ est un groupe.

(f) Si $X$ est fini alors

$$|A\Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

**Exercice 1.4.** Soient $X$ et $Y$ des ensembles non vides, $F \subseteq X \times Y$ et $G \subseteq Y \times X$. On définit deux applications $\phi$ et $\gamma$ comme suit :

$$\phi : \begin{cases} P(X) & \to & P(Y) \\ A & \mapsto & \{y \in Y \mid \exists a \in A\colon \quad (a, y) \in F\} \end{cases}$$

et

$$\gamma : \begin{cases} P(Y) & \to & P(X) \\ B & \mapsto & \{x \in X \mid \exists b \in B\colon \quad (b, x) \in G\}. \end{cases}$$

Montrer que si $\gamma(\phi(\{x\})) = \{x\}$ et $\phi(\gamma(\{y\})) = \{y\}$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, alors $F$ est le graphe d'une fonction bijective $f$ entre $X$ et $Y$ dont on précisera l'inverse. [Indication: commencer par vérifier que $F$ est le graphe d'une application (qu'on appellera $f$), c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, il existe un et un seul $y$ tel que $(x, y) \in F$, et de même vérifier que $G$ est le graphe d'une application $g$. Prouver ensuite que $f$ et $g$ ont les propriétés requises.]

**Exercice 1.5.** Soit $f$ une application de $\underline{n}$ dans $\underline{n}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est injective.
2. $f$ est surjective.
3. $f$ est bijective.

Quand l'une des propriétés est satisfaite, on dit que $f$ est une permutation.

**Exercice 1.6.** Soient $f, g \in 2^{\mathbb{N}}$, $f \neq g$ et soit $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier oú $f$ et $g$ diffèrent. On suppose sans perte de généralité que $f(m) = 1$, $g(m) = 0$. Montrer que $\sum_{i\geq 0} f(i)2^{-i-1} = \sum_{i\geq 0} g(i)2^{-i-1}$ si et seulement si il existe $n \geq 0$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées:

(a) $\forall i < n\colon \quad f(i) = g(i)$

(b) $f(n) = 1, g(n) = 0$

(c) $\forall i > n\colon \quad f(i) = 0, g(i) = 1.$

**Exercice 1.7.** Une université a publié les résultats suivants suite à un recensement de ses étudiants: Il y a 10000 étudiants parmi lesquels 2521 sont mariés, 6471 sont des hommes, 3115 ont plus de 21 ans, 1915 sont des hommes mariés, 1873 sont mariés et ont plus de 21 ans et 1302 sont des hommes mariés de plus de 21 ans. Ces nombres peuvent-ils être corrects ?