Exercice 2.1. Soient X, Y et Z des ensembles. Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications. On rappelle que $g \circ f$ est une application de X dans Z et est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in X$. Prouver ou trouver un contre-exemple pour les faits suivants :

1. Si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est injective, alors g est injective.

Exercice 2.2. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ de toutes les parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ qui contiennent exactement n éléments est dénombrable.
2. Construire maintenant une injection de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et en déduire que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.
3. Donner l'idée d'une autre preuve basée sur la représentation binaire d'un nombre entier.

Exercice 2.3. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des applications.

Exercice 2.4. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) \setminus \emptyset) \times (P(X) \setminus \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ lorsque $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive? c'est-à-dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X) \setminus \emptyset$?

(b) R est-elle symétrique? c'est-à-dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

(c) R est-elle transitive? c'est-à-dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Exercice 2.5. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et f une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathcal{E}^2, \qquad x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{Z}, y = f^n(x).$$

On notera que la fonction f^0 représente l'identité et que $f^{-n} = (f^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si C est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, alors $f(C) = C$.
3. Montrer que si X est une partie non vide de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(X) = X$, alors X est une réunion de classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Exercice 2.6. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Exercice 2.7. Pour une relation R sur l'ensemble X, on définit la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les relations R^n sont distinctes quand $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.