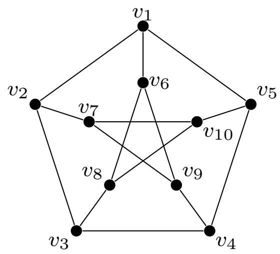
On définit un graphe *d-régulier* comme un graphe dont chaque sommet est de degré d, et en général un graphe *régulier* comme un graphe dont tous les sommets ont le même degré.

On rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$.

Exercice 5.1. Soit $d \geq 3$. Montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c\log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

Exercice 5.2. Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3). (Indication : si (u, v) est une arête et que u, v n'ont pas de voisin commun, trouver une relation entre $\deg u$, $\deg v$ et n et sommer cette relation.)

Exercice 5.3. Montrer que le graphe de Petersen dessiné ci-dessous est isomorphe au graphe $G = (V, E)$ avec $V = \{A \subset \underline{5}, |A| = 2\}$ et $E = \{(A, B) \in V^2, A \cap B = \emptyset\}$.



Exercice 5.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que G est un graphe régulier. (Indice: choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble A des voisins de a différents de b et l'ensemble B des voisins de b différents de a, puis compter le nombre d'arêtes entre les ensembles A et B).

Exercice 5.5. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe des arêtes* de G est le graphe

$$L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E \text{ et } (b, c) \in E\}.$$

1. Si la somme des degrés des sommets de G est s, quel est le nombre de sommets de $L(G)$?
2. Supposons que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$. Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes G est-il isomorphe à $L(G)$? Justifier sa réponse.

Exercice 5.6. On rappelle qu'un *arbre* est un graphe connexe acyclique. On appelle *feuille* tout sommet de degré 1.

1. Montrer que tout arbre à plus de deux sommets possède au moins deux feuilles, et qu'il possède exactement deux feuilles si et seulement si c'est un chemin. (Indication: que vaut la somme des degrés de l'arbre?)
2. Soient G un graphe et v une feuille de G. Montrer que G est un arbre si et seulement si $G' = G \setminus \{v\}$ est un arbre.
3. Montrer qu'un graphe G est un arbre si et seulement si quels que soient les sommets distincts v et w de G il existe exactement un chemin reliant v et w.
4. Soit G un graphe à plus de deux sommets. Montrer que G est un arbre si et seulement si G n'est pas le graphe complet et ajouter à G une arête quelconque crée un seul cycle.

Exercice 5.7. Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un graphe planaire avec n sommets et $3n - 6$ arêtes.