Exercice 6.1. Pour cet exercice, on définit la notion de "cycle non-simple", qui est un chemin $v_0 - \ldots - v_n$ avec $v_n = v_0$, sans la contrainte que le chemin soit nécessairement simple.
Soit G un graphe 2-connexe, c'est-à-dire que G est connexe et que si on enlève n'importe quelle arête de G, le graphe résultant est encore connexe. Montrer que pour tout couple de sommets v_1, v_2 de G, il existe un cycle non-simple qui passe par v_1 et v_2. (Indice: on pourra raisonner par récurrence sur la distance entre v_1 et v_2).

Exercice 6.2. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes que les 5 solides de Platon (tétraèdre, cube, octaèdre, dodecaèdre, isocaèdre). On remarque que le graphe de tels polyèdres est un graphe planaire tel que chacun des n sommets soit de même degré d et que chacune des f faces soit adjacente à k arêtes. En notant de plus m le nombre d'arêtes, établir l'équation suivante

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$$

et montrer que seulement 5 valeurs sont possibles pour (d, k, n, m, f). Conclure.

Exercice 6.3. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer que la carte induite par les faces d'un dessin de G dans le plan est 2-coloriable. (Indice: on pourra faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Exercice 6.4. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).

Exercice 6.5. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \ldots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$.

Exercice 6.6. On définit les notions suivantes :

- La **distance de Hamming** $d_H(x, y)$ entre deux vecteurs binaires $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est le nombre de positions où les deux vecteurs diffèrent : $d_H(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$.
- Le **poids de Hamming** $\mathrm{wgt}_H(x)$ d'un vecteur x est le nombre de ses coordonnées non nulles, c'est-à-dire $d_H(x, 0)$, avec 0 le vecteur tout à zéro.
- Le graphe de l'**hypercube** ou simplement l'**hypercube** $\mathcal{H}_n$ est le graphe $G = (\{0, 1\}^n, E)$ avec $E = \{(x, y) \mid d_H(x, y) = 1\}$.

Répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont les hypercubes pour $n = 1, 2, 3, 4$?
2. Pour $x, y \in \{0, 1\}^n$, prouver que

$$\mathrm{wgt}_H(x + y) = \mathrm{wgt}_H(x) + \mathrm{wgt}_H(y) - 2\mathrm{wgt}_H(xy),$$

avec $x + y$ la somme binaire terme à terme de x et y, et xy le produit terme à terme de x et y.

3. Prouver que $\chi(\mathcal{H}_n) = 2$ [indication: colorier les vecteurs x en fonction de leur poids].

4. En déduire que $\omega(\mathcal{H}_n) = 2$.

5. Exhiber un ensemble indépendent de $\mathcal{H}_n$ de taille 2^{n-1}.

6. Prouver que $\alpha(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$ [indication: pour un ensemble independent S, considérer son intersection S_0 avec l'ensemble des vecteurs de poids pair, et son intersection S_1 avec l'ensemble des mots de poids impair. Pour borner $|S_0| + |S_1|$, établir une bijection entre S_0 et un sous-ensemble (à déterminer) de l'ensemble des vecteurs de poids impair].

7. En déduire que $\theta(\mathcal{H}_n) = 2^{n-1}$.

8. Prouver que $\mathcal{H}_n$ admet un cycle hamiltonien pour $n \geq 2$. Un cycle hamiltonien de $\mathcal{H}_n$ est appelé un **code de Gray** de longueur n.

9. Quels sont les codes de Gray pour $n = 2, 3, 4$?