Exercice 7.1. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
2. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

Exercice 7.2. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment?

Exercice 7.3. Soit n un entier et soit S_n le nombre de vecteurs $(s_1, \ldots, s_k) \in \{1, 2, 3\}^k$ tels que $\sum_i s_i = n$ et $k \geq 1$ entier. Par exemple, $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 4$ et $S_4 = 7$.

1. Trouver une récurrence pour S_n qui fait intervenir S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
2. Exprimer la série génératrice $S(x)$ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme d'une fraction rationnelle.

On peut montrer (voir corrigé) qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que S_n/θ^n converge vers un nombre réel non nul quand n tend vers l'infini.

Exercice 7.4.

1. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels positifs, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^3 \geq (\sum_i x_i/n)^3$.
2. Soit $G = (V, E)$ un graphe sur n sommets qui ne contient pas $K_{3,3}$ comme sous-graphe. On définit la matrice dont les lignes sont indexées par les sous-ensembles de V de cardinal 3, et les colonnes par les éléments de V. A la ligne $\{v_1, v_2, v_3\}$ et la colonne u, on inscrit la valeur 1 dans la matrice si u est connecté à v_1, v_2 et v_3, sinon on y inscrit 0. Compter de deux manières différentes le nombre de 1 de cette matrice. En déduire qu'il existe une constante c telle que G a au plus $cn^{5/3}$ arêtes.