

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 1

26 Sep. 2011

1. Spécification formelle I

Considérons le problème suivant : étant donné un ensemble fini de nombres naturels S , les éléments de S sont-ils tous pairs ?

Nous voulons trouver une spécification formelle de ce problème, c'est-à-dire :

- l'ensemble des inputs possibles I
- l'ensemble des outputs possibles O
- la dépendance relationnelle entre les deux $R \subseteq I \times O$, avec

$(i, o) \in R \iff o$ est un output valable quand l'input i est donné au problème

- a) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans I : 4 , 7 , \mathbb{N} , $\{1, 2\}$, $\{1\}$, $\{1, \dots, 100\}$, $\text{Pot}(\mathbb{N})$, $\{-1, 100, 2\}$.
- b) Que vaut I ?
- c) Puisqu'il s'agit d'un problème de décision, on sait que $O = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$. Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R : $(2, \text{vrai})$, $(\{2\}, \text{vrai})$, $(\mathbb{N}, \text{faux})$, $(7, \text{faux})$, $(\{1, \dots, 100\}, \text{faux})$, $(\{1, 2, 4, 6\}, \text{vrai})$.
- d) Que vaut R ?

Considérons maintenant le problème suivant : étant donné un ensemble fini de nombres naturels S , combien y a-t-il d'éléments de S qui sont pairs ?

On veut trouver une spécification formelle (I_2, O_2, R_2) de ce problème.

- e) Que vaut I_2 ?
- f) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans O_2 : $\{2, 4\}$, $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$, 1 , \mathbb{N} , 0 , 258 .
- g) Que vaut O_2 ?
- h) Indiquer lesquels des éléments suivants sont dans R_2 : $(\{1, 2, 3\}, 1)$, $(\{1, 8, 6, 2\}, 3)$, $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 4\})$.
- i) Étant donné un ensemble S , exprimer de manière formelle l'assertion suivante : "Il existe un sous-ensemble de S de taille n , dont tous les éléments sont pairs". (utiliser la partie d)).
- j) Que vaut R_2 ?

2. Spécification formelle II

Donner des spécifications formelles des problèmes suivants :

- a) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer si n est impair.
- b) Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, quel est son plus grand diviseur qui soit inférieur à n ?

- c) Un *sous-mot* d'un mot W est un mot dont les composantes se trouvent aussi dans W , et ceci consécutivement et dans le même ordre. Par exemple, (m, i, c, r, o) est un sous-mot de $(m, i, c, r, o, s, o, f, t)$, $(4, 7, 11)$ est un sous-mot de $(9, 3, 4, 7, 11, 5)$, mais (n, f, x) n'est pas un sous-mot de (n, o, f, x) et (rouge, bleu) n'est pas non plus un sous-mot de (bleu, rouge, vert).

Soit $\mathcal{A} = \{a, b, \dots, z\}$, et soient $S = (s_1, \dots, s_n)$ et $T = (t_1, \dots, t_m)$ des mots sur \mathcal{A} (i.e., $S, T \in \mathcal{A}^+$). Est-ce que S est un sous-mot de T ?

3. Induction Soit $A(n) = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$.

- Calculer $A(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Comparer la suite $A(n)$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ avec la suite $n!$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Deviner une formule générale pour $A(n)$ et prouver cette formule par induction