

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE**

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

**Série d'exercices 2**

3 October 2011

**1. Induction**a) Prouver par induction que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq -1$ , on a

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

b) Prouver par induction que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

**2. Induction**Soit  $P(n)$  la propriété suivante:“Dans une classe de  $n$  élèves, s'il y a au moins une fille alors tous les élèves sont des filles.”

Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant?

Nous allons “montrer” par induction sur  $n$  que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

**Base:**  $n = 1$ . Dans une classe de 1 élève, clairement s'il y a au moins une fille alors elle sera la seule personne dans la classe, il est donc vrai que tous les élèves sont des filles.

**Pas:** Supposons que  $P(n)$  est vraie. Nous voulons en déduire que  $P(n+1)$  est vraie. Supposons que nous avons une classe  $C$  de  $n+1$  élèves, dans laquelle il y a au moins une fille  $f \in C$ . Prenons à présent un élève  $e_1 \neq f$  dans cette classe, donc  $e_1 \in C$ . Enlevons cet élève pour obtenir une classe  $C_1 = C \setminus \{e_1\}$  de  $n$  élèves, qui contient au moins une fille (puisque  $f \in C_1$ ). Puisque  $P(n)$  est vraie, on en déduit qu'il n'y a que des filles dans  $C_1$ . Donc tous les élèves dans  $C$ , sauf  $e_1$  sont des filles.

Il reste donc à montrer que  $e_1$  est une fille. On prend maintenant un autre élève  $e_2$  avec  $e_2 \neq f$  et  $e_2 \neq e_1$ , et on fait le même raisonnement que ci-dessus pour déduire que tous les élèves dans  $C_2 = C \setminus \{e_2\}$  sont des filles. Puisque  $e_1 \in C_2$ ,  $e_1$  est aussi une fille et donc tous les élèves dans  $C$  sont des filles.

**3. La notation  $O$** Rappelle la notation  $O$ .

- a) Montrer que  $n^2 + 100 = O(n^2)$ , c'est à dire trouver des éléments  $c$  et  $n_0$  satisfaisant la définition. Montrer maintenant que  $n^2 + 100 = \Theta(n^2)$ .
- b) Supposons que  $f(n) = O(g(n))$  et  $g(n) = O(h(n))$ . Montrer que  $f(n) = O(h(n))$ .
- c) Montrer que  $n = \Omega(\log_2(n))$ .
- d) Supposons que  $f(n) = O(g(n))$ . Montrer que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  on a  $a \cdot f(n) = O(b \cdot g(n))$
- e) Montrer que pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $a \in \mathbb{R}$  avec  $a > 1$ , on a  $n^d = O(a^n)$ .
- f) Remplir le tableau suivant par vrai ou faux.

$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$	$f(n) = \Omega(g(n))$	$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = o(g(n))$
$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$				
$\ln(n)$	$\ln^2(n)$				
$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$				
$2^n$	$n!$				
$\log_2(n)$	$\log_3(n)$				
$\ln(n)$	$\ln \ln(n)$				
$2^{\ln(n)}$	$n^2$				
$2^n$	$n^{\ln \ln(n)}$				
$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$				

#### 4. L'Algorithme de Karatsuba

- a) Soient  $f(x) = a + b \cdot x$  et  $g(x) = \alpha + \beta \cdot x$  deux polynômes de degré 1 sur  $\mathbb{R}$ . Utiliser l'algorithme de Karatsuba pour multiplier  $f(x)$  et  $g(x)$ . De combien de multiplications d'éléments de  $\mathbb{R}$  a-t-on besoin?
- b) Soient  $f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3$  et  $g(x) = 2 + 2x + x^2 + x^3$  deux polynômes de degré 3 sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant l'algorithme naïf pour multiplier  $f(x)$  et  $g(x)$ , de combien de multiplications d'éléments de  $\mathbb{R}$  a-t-on besoin?
- c) Considérons maintenant l'algorithme de Karatsuba pour  $f(x)$  et  $g(x)$  dans la question précédente. Que valent  $f_0, f_1, g_0, g_1$ ? Que valent  $u$  et  $v$ ?
- d) Utiliser l'algorithme de Karatsuba pour effectuer la multiplication, et compter le nombre de multiplications sur  $\mathbb{R}$  qui sont nécessaires.
- e) On veut multiplier deux polynômes de degré deux,  $f(x) = f_2x^2 + f_1x + f_0$  et  $g(x) = g_2x^2 + g_1x + g_0$ , en effectuant le moins de multiplications possibles. Spécialisez l'algorithme de Karatsuba à ce cas et modifiez-le pour qu'il n'effectue que 6 multiplications.

#### 5. Elever une matrice au carré

Soit  $A$  la matrice  $2 \times 2$  sur  $\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- a) Trouver un algorithme qui calcule  $A^2$  en utilisant 5 multiplications d'éléments de  $\mathbb{R}$  (et autant d'additions d'éléments de  $\mathbb{R}$  que nécessaire).
- b) Peut-on généraliser cet algorithme récursivement à toute matrice  $n \times n$  pour obtenir un algorithme  $O(n^{\log_2(5)})$  (comme nous l'avons fait dans le cours pour l'algorithme de Strassen)? Pourquoi?