Exercice 2.1. Soient X, Y et Z des ensembles. Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications. On rappelle que $g \circ f$ est une application de X dans Z et est définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in X$. Prouver ou trouver un contre-exemple pour les faits suivants :

1. Si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4. Si $g \circ f$ est injective, alors g est injective.

Solution 2.1.

(1),(4) Soient $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application donnée par $f(x) = x$ et $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ donnée par $g(x) := |x|$. Alors $g \circ f$ est l'application identité sur $\mathbb{N}$: si $z \in \mathbb{N}$, alors $(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z) = |z| = z$. Donc $g \circ f$ est injective et surjective. Mais f n'est pas surjective et g n'est pas injective. Donc les deux assertions (a) et (d) sont fausses.

(2) Supposons que $g \circ f$ est surjective et montrons que g l'est aussi. Soit $z \in Z$, montrons qu'il existe un $y \in Y$ tel que $g(y) = z$. A cette fin, utilisons la surjectivité de $g \circ f$ pour trouver un $x \in X$ tel que $(g \circ f)(x) = z$. Posons $y = f(x)$. Alors $g(y) = g(f(x)) = z$. Donc g est bien surjective.

(3) Supposons que $g \circ f$ est injective et montrons que f est injective. Nous allons démontrer la contraposée, c'est-à-dire l'assertion « f n'est pas injective implique que $g \circ f$ n'est pas injective ». Soient x et x' dans X tels que $f(x) = f(x')$. Alors, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x')$. Donc $g \circ f$ n'est pas injective, cqfd.

Exercice 2.2. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ de toutes les parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ qui contiennent exactement n éléments est dénombrable.
2. Construire maintenant une injection de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et en déduire que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.
3. Donner l'idée d'une autre preuve basée sur la représentation binaire d'un nombre entier.

Solution 2.2.

1. Soit $\binom{\mathbb{N}}{n}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à n éléments. On peut définir une injection $\iota_n\colon \binom{\mathbb{N}}{n} \to \mathbb{N}^n$ comme suit : si S est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ à n éléments, on ordonne les éléments de S par ordre croissant, c'est-à-dire qu'on écrit $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. L'image de S par ι_n est alors $(a_1, \ldots, a_n)$. Par le théorème 1.14(d), on sait que $\mathbb{N}^n$ is dénombrable. Soit f une fonction de comptage correspondante (une bijection entre $\mathbb{N}^n$ et $\mathbb{N}$). Alors $g_n := f \circ \iota_n\colon \binom{\mathbb{N}}{n} \to \mathbb{N}$ est une fonction de comptage pour $\binom{\mathbb{N}}{n}$.
2. Soit g_n la fonction de comptage pour $\binom{\mathbb{N}}{n}$ construite dans la question précédente. On construit maintenant une injection $\varphi\colon A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ comme suit : si S est une partie de $\mathbb{N}$ à t éléments, alors $\varphi(S) = (t, g_t(S))$. $\varphi(S)$ est bien injective. En effet, soient S et T deux sous-ensembles distincts de $\mathbb{N}$. Si S et T n'ont pas le même nombre d'éléments, alors $\varphi(S)$ et $\varphi(T)$ diffèrent sur la première coordonnée. Si S et T ont le même nombre n d'éléments, alors $g_n(S)$ et $g_n(T)$ sont différents puisque g_n est une fonction de comptage pour $\binom{\mathbb{N}}{n}$. Donc $\varphi(S)$ et $\varphi(T)$ sont différents.
3. On peut directement construire une injection τ de $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$: si $S = \{s_1, \ldots, s_t\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on définit $\tau(S) := \sum_{i=1}^{t} 2^{s_i}$. Puisque les représentations binaires des nombres naturels sont uniques, τ est injective (en fait, même bijective).

Exercice 2.3. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des fonctions. Trouver toutes les relations sur $\{a, b\} \times \{c, d\}$ qui ne sont pas des applications.

Solution 2.3. Soit $A := \{a, b\}$ et $C := \{c, d\}$. Dans ce cas, une relation $R \subseteq A \times C$ n'est pas une fonction s'il existe $x \in A$ tel que $|\{y \in C \mid (x, y) \in R\}| > 1$. On trouve :

$$\{(a,c),(a,d)\}, \{(a,c),(a,d),(b,c)\}, \{(a,c),(a,d),(b,d)\}, \{(a,c),(b,c),(b,d)\},$$
$$\{(b,c),(b,d),(a,d)\}, \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}, \{(b,c),(b,d)\}.$$

Ainsi il y a 7 relations qui ne sont pas des fonctions.

Une relation R n'est pas une application si R n'est pas une fonction ou si la relation n'est pas totale, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que pour tout $y \in C$, $(x, y) \notin R$. Cela ajoute donc les cas suivants

$$\emptyset, \{(a,c)\}, \{(a,d)\}, \{(b,c)\}, \{(b,d)\}.$$

et porte à 12 le nombre de relations qui ne sont pas des applications.

Exercice 2.4. Soit X un ensemble non-vide et $R \subseteq (P(X) \smallsetminus \emptyset) \times (P(X) \smallsetminus \emptyset)$ la relation définie par $(A, B) \in R$ lorsque $A \cap B \neq \emptyset$.

(a) R est-elle réflexive ? c'est-à-dire, $(A, A) \in R$ pour $A \in P(X) \smallsetminus \emptyset$?

(b) R est-elle symétrique ? c'est-à-dire, $(A, B) \in R$ implique $(B, A) \in R$?

(c) R est-elle transitive ? c'est-à-dire, $(A, B), (B, C) \in R$ implique $(A, C) \in R$?

Solution 2.4.

(a) La relation ne serait pas réflexive si $A \in P(X)$. Lorsque $A = \emptyset$, alors $(\emptyset, \emptyset) \notin R$. Mais si $A \in P(X) \smallsetminus \emptyset$, alors $A \cap A = A \neq \emptyset$, si bien que $(A, A) \in R$.

(b) C'est clairement le cas puisque $A \cap B = B \cap A$, si bien que ces ensembles sont tous les deux vides ou non simultanément.

(c) La relation n'est pas transitive. Supposons que $B = A \sqcup C$, où $A, C \neq \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$. Alors $(A, B) \in R$ et $(B, C) \in R$ mais $(A, C) \notin R$.

Exercice 2.5. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble et f une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathcal{E}^2, \qquad x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \exists n \in \mathbb{Z}, y = f^n(x).$$

On notera que la fonction f^0 représente l'identité et que $f^{-n} = (f^{-1})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si C est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$, alors $f(C) = C$.
3. Montrer que si X est une partie non vide de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(X) = X$, alors X est une réunion de classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Solution 2.5.

1. (a) Réfléxivité : si $x \in \mathcal{E}$, on a $x = f^0(x)$, donc $x\mathcal{R}x$.

   (b) Symétrie : si $(x, y) \in \mathcal{E}^2$ tels que $x\mathcal{R}y$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f^n(x)$. Mais alors $x = f^{-n}(y)$, donc $y\mathcal{R}x$.

   (c) Transitivité : si $(x, y, z) \in \mathcal{E}^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y = f^{n_1}(x)$ et $z = f^{n_2}(y)$. Mais alors, en posant $n = n_1 + n_2$, on a $z = f^n(x)$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in C$. Puisque C est une classe contenant x, elle est égale à l'ensemble $\{z : z\mathcal{R}x\}$, c'est-à-dire que $C = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.
   Soit $y \in C$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$. Soit $z := f^{n-1}(x)$. Alors $z \in C$, d'où il s'ensuit que $y = f(z) \in f(C)$. Donc $C \subseteq f(C)$.
   Réciproquement, soit $y \in f(C)$. Alors il existe $z \in C$ tel que $y = f(z)$. Mais z peut s'écrire $z = f^n(x)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, d'où $y = f^{n+1}(x) \in C$. Donc $f(C) \subseteq C$.
3. Montrons que $X = \bigcup_{x\in X}[x]_\mathcal{R}$. Il est clair que $X \subseteq \bigcup_{x\in X}[x]_\mathcal{R}$, car pour tout $x \in X$, $x \in [x]_\mathcal{R}$. Par ailleurs, montrons que si $x \in X$, $[x] \subseteq X$. Soit $y \in [x]$, alors il existe un entier n tel que $y = f^n(x)$. Si n est nul, il n'y a rien à montrer. Si $n > 0$, on peut remarquer que $x \in X$ implique que $f(x) \in f(X) = X$ et en répétant le raisonnement (récurrence), $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \in f(X) = X$. Si $n < 0$, le même raisonnement fonctionne en observant que $f^{-1}(X) = X$.

Exercice 2.6. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence ? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Solution 2.6. Dans les deux cas, R est transitive par définition et l'on peut montrer facilement en utilisant la transitivité que R est aussi réflexive. En effet, donnons-nous un entier a, alors $(a, a + 2) \in R$ et $(a + 2, a) \in R$, donc par transitivité, $(a, a) \in R$. Le problème est donc de montrer la symétrie.

Dans le premier cas, on peut observer que tous les nombres de même parité $(a, a + 2n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont en relation. Toutefois, ces conditions ne suffisent pas à imposer la symétrie. On peut en effet imaginer la relation $R = \{(2n, 2n'), (2n + 1, 2n' + 1), (2n, 2n' + 1); n, n' \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est pas symétrique.

Dans le second cas, les entiers dont la différence est divisible par 3 ou par 4 sont dans R, et par transitivité, les entiers dont la différence est divisible par $3n + 4m$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ sont dans R. Mais alors comme 3 et 4 sont premiers entre eux, tout couple d'entiers dont la différence est divisible par le p.g.c.d. de 3 et 4 appartient à R. Autrement dit, tout couple d'entiers appartient à R. Donc R est trivialement une relation d'équivalence.

Exercice 2.7. Pour une relation R sur l'ensemble X, on définit la relation R^n par récurrence sur n avec $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Montrer que si X est fini, il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s < r$ et $R^s = R^r$.
2. Trouver une relation R sur un ensemble fini X tel que $R^{n+1} \neq R^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver une relation R sur un ensemble infini X tel que toutes les relations R^n sont distinctes quand $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer qu'une relation R est transitive ssi $R^n \subseteq R$ pour tout $n \geq 1$.

Solution 2.7. Remarque : R^n dénote R composée n fois, c'est-à-dire

$$R^n = \{(a, b) \mid \exists x_2, \ldots, x_{n-1} \in X \text{ t.q. } a \sim_R x_2, x_2 \sim_R x_3, \ldots, x_{n-2} \sim_r x_{n-1}, x_{n-1} \sim_R b\}.$$

On notera aussi que $R^n = R \circ R^{n-1}$.

1. L'ensemble X est fini, il en va de même de $P(X \times X)$. Comme $R^n \in P(X \times X)$ pour tout entier n, il s'ensuit que la suite $R, R^2, R^3, \ldots$ ne peut être formée d'ensembles tous distincts (lemme des tiroirs). Ainsi il existe deux indices r et s ($r < s$) tels que $R^r = R^s$.
2. Soit $R = \{(1, 2), (2, 1)\} \subset \{1, 2\} \times \{1, 2\}$. Alors, $R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ et $R^3 = R \circ R^2 = R$. Plus généralement, $R^n = R^2$ si n est pair et $R^n = R$ si n est impair.
3. Soit R la relation « successeur direct », c'est-à-dire, $R = \{(a, a + 1) \mid a \in \mathbb{Z}\}$, alors, $R^n = \{(a, a + n) \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Les relations $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc toutes distinctes.

4. D'après la définition 2.3, on sait que R est transitive ssi $R^2 \subseteq R$. Supposons que R soit transitive. Raisonnons par récurrence et supposons avoir démontré que $R^n \subseteq R$ pour un certain $n \geq 2$. Il s'ensuit que $R^{n+1} = R \circ R^n \subseteq R \circ R \subseteq R$, ce qui prouve notre assertion. Réciproquement, supposons que pour tout entier $n \geq 2$, $R^n \subseteq R$, alors pour $n = 2$ en particulier, nous avons $R^2 \subseteq R$ ce qui est la définition de la transitivité.