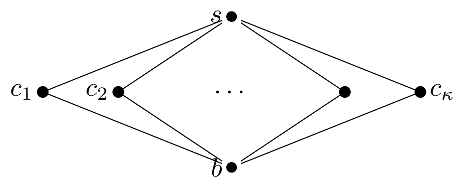
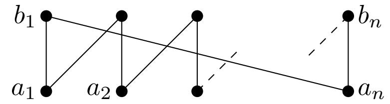
Exercice 4.1. Calculez la largeur des posets suivants :

1. $\mathcal{A}_\kappa$ est une antichaîne de cardinal κ.
2. $\mathcal{M}_\kappa$ correspond au diagramme de Hasse ci-dessous.



3. $\mathcal{C}_n$, où $n \in \mathbb{N}$, qui correspond au diagramme en couronne ci-dessous.



4. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ où X est un ensemble fini.

Solution 4.1.

1. La largeur de $\mathcal{A}_\kappa$ est κ par définition.
2. Notons que $C = \{c_1, \ldots, c_\kappa\}$ est une antichaîne. Soit A une antichaîne. Si A contient s ou b, A ne peut pas contenir d'autre élément. Donc C est maximale et la largeur vaut κ.
3. On remarque que les seules chaînes de $\mathcal{C}_n$ possèdent soit un seul élément, soit deux éléments, à savoir (a_i, b_i) ou bien $(a_i, b_{i+1 \mod n})$. Il faut donc au moins n chaînes pour recouvrir tout le poset. Cette borne inférieure est atteinte lorsqu'on prend par exemple les chaînes $(a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n}$. D'après le théorème de Dilworth, on conclut que la largeur vaut n.
4. En notant $n = |X|$, on peut identifier X à $[n]$ et appliquer le théorème de Sperner : la largeur de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ vaut $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice 4.2. Soit $(R, \leq)$ un poset de cardinal supérieur à $ab+1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $(R, \leq)$ possède soit un antichaîne de longueur supérieure à $a+1$, soit une chaîne de longueur supérieure à $b+1$.

Solution 4.2. Notons ℓ la largeur du poset. Deux cas peuvent se présenter : $\ell \geq a+1$ ou $\ell \leq a$. Dans le premier cas, cela signifie que R possède une antichaîne de cardinal $\ell \geq a+1$. Dans le second cas, d'après le théorème de Dilworth, il existe une décomposition de R en ℓ chaînes. Notons m le maximum de leur cardinal, de sorte que $|R| \leq \ell m \leq am$. Mais $|R| \geq ab+1$, donc $m > b$ ce qui achève de démontrer l'alternative.

Exercice 4.3. (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

Solution 4.3. Comme on s'intéresse uniquement au cardinal de l'ensemble, on peut supposer sans perte de généralité que tous les a_i sont positifs. En ordonnant les éléments de l'ensemble $\{-1,1\}^n$ par $\varepsilon \leq \mu$ ssi $\varepsilon_i \leq \mu_i$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$, on se rend compte que l'ensemble que l'on cherche forme une antichaîne. En effet, si ε et μ sont distincts et comparables, disons $\varepsilon < \mu$, en notant D l'ensemble des positions où ε et μ diffèrent, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = 2 \sum_{i \in D} a_i \ .$$

Donc si D est non vide, la différence entre ces deux sommes est de valeur absolue strictement plus grande que 2 (car $|a_i| > 1$ pour tout i). C'est-à-dire que ε et μ ne peuvent tous deux appartenir à l'ensemble recherché.

Il faut ensuite remarquer que notre poset sur $\{-1,1\}^n$ est en fait identique au poset booléen B_n. Une application directe du théorème de Sperner nous donne alors directement l'inégalité car il nous montre qu'une antichaîne d'un tel poset est de cardinal $\leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Un cas d'égalité est obtenu pour n pair et tous les a_i de même valeur absolue. En effet, dans ce cas l'ensemble solution est clairement en bijection avec les parties à $n/2$ éléments de $\underline{n}$.

Exercice 4.4. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de E est pris dans $\binom{V}{2}$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Solution 4.4. Supposons G non connexe et montrons que son complémentaire l'est en montrant que pour tout $v_1, v_2 \in V$ il existe un chemin dans E^c allant de v_1 à v_2.

- Si v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe, alors en particulier $(v_1, v_2) \notin E$, donc $(v_1, v_2) \in E^c$: ainsi v_1 et v_2 sont même voisins dans le graphe complémentaire $\overline{G}$.

- Si v_1 et v_2 appartiennent à la même composante connexe, comme G n'est pas connexe il existe un sommet v_3 de G qui n'est pas dans la même composante connexe que v_1 et v_2. On en déduit alors en appliquant deux fois le raisonnement précédent que (v_1, v_3) et (v_3, v_2) sont des arêtes de $\overline{G}$ qui forment un chemin de v_1 à v_2.

Exercice 4.5. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Solution 4.5. On montre la contraposée. Si G n'est pas connexe, il existe une composante connexe de taille au plus $\lfloor n/2 \rfloor$. Un sommet de cette composante est donc de degré au plus $\lfloor n/2 \rfloor - 1$, c'est-à-dire $< \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, d'où le résultat.

Exercice 4.6. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Solution 4.6. Il suffit de montrer l'équivalence dans le cas où G est connexe. Le cas général s'ensuit facilement, puisque un graphe est biparti ssi ses composantes connexes le sont et que les cycles d'un graphe demeurent dans l'une de ses composantes connexes. Nous supposons donc G connexe. Montrons les deux assertions suivantes :

- S'il existe un cycle impair, alors G est non biparti.
  Pour un tel cycle $v_1 - \cdots - v_{2p+1} - v_1$, on peut montrer par récurrence en partant de v_1 que tous les v_i pour i impair sont du même côté dans le graphe biparti, ce qui est une contradiction car v_{2p+1} et v_1 sont voisins.

- S'il n'existe aucun cycle impair, alors $G = (V, E)$ est biparti :
  Prenons un sommet v_0 de G et notons A l'ensemble des sommets à distance paire de v_0,

c'est-à-dire que la longueur du plus court chemin entre v_0 et les éléments de A est paire. On pose alors $B = V \setminus A$. Le graphe G est alors biparti pour cette décomposition ss'il n'y a aucune arête entre deux sommets de A ou deux sommets de B. Supposons qu'il existe une arête (a, a') dans A, alors par hypothèse, il existe un chemin c de longueur minimale de v_0 à a, et un chemin c' de longueur minimale de a' à v_0, avec c et c' de longueur paire. Soit w le sommet commun aux deux chemins c et c' le plus distant de v_0. On peut former le cycle passant par w, a et a' qui emprunte successivement une portion de c, l'arête (a, a') puis une portion de c' pour revenir en w. Ce cycle est de longueur impaire car la distance entre w et a est de même parité que celle entre w et a'. Mais la présence d'un cycle de longueur impaire est exclue, donc il ne peut y avoir d'arête entre a et a'. On exclut de même qu'une arête puisse exister entre deux sommets de B.