Théorème [Cantor-Bernstein-Schroeder] Soient A et B des ensembles. Si $|A| \le |B|$ et $|B| \le |A|$, alors $|A| = |B|$.

Preuve Soient $f : A \to B$ et $g : B \to A$ des injections. Soit $C_0 := A \setminus g(B)$ et $C_{n+1} = g(f(C_n))$ pour $n \ge 0$, et $C = \bigcup_{i \ge 0} C_i$. Si $x \notin C$, alors $x \notin C_0$ et $x \in g(B)$. Comme $g^{-1} : g(B) \to B$ est une bijection, on peut définir $h : A \to B$ avec

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

- h est injective:
  f est injective sur C et g^{-1} est injective sur $A \setminus C$. Le seul cas intéressant est le suivant: soit $x \in C$, $y \notin C$ et $h(x) = h(y)$. Alors $f(x) = g^{-1}(y)$ et donc $y = g(f(x))$; mais alors comme $x \in C$, il existe un i tel que $x \in C_i$ et $y = g(f(x)) \in C_{i+1}$, ce qui contredit $y \notin C$. Donc $h(x) \neq h(y)$.

- h est surjective:
  Soit $b \in B$. Si $b \in f(C)$ la fibre de b par h est bien non vide. Sinon, $b \notin f(C)$; soit $a := g(b)$. On montre d'abord que $a \notin C$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $i \neq 0$ t.q. $a \in C_i$, i.e., $a = g(f(z))$ pour $z \in C_{i-1}$. Mais alors

  $$g(f(z)) = g(b) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(z) = b \Rightarrow b \in f(C_{i-1}) \Rightarrow b \in f(C),$$

  où (1) suit de l'injectivité de g, ce qui est une contradiction. On a donc bien $a \notin C$ et $h(a) = g^{-1}(g(b)) = b$. $\square$