ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Examen final 21.01.2013

Mathématiques discrètes

21.01.2013

- Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille supplémentaire.
- L'usage de documents et de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve. Seul un formulaire personnel manuscrit sur une feuille A4 recto-verso est toléré.
- Les résultats des questions intermédiaires peuvent être admis pour la suite de chaque problème.
- Pour obtenir la totalité des points, il est nécessaire de justifier raisonnablement toutes vos réponses.
- La durée de l'épreuve est de trois heures. Bonne chance.

Nom :

Problème 1	Problème 2	Problème 3	Problème 4	Problème 5	Problème 6
20 points	20 points	20 points	20 points	20 points	20 points

Total
120 points

Problème 1 [20 points].

1. On suppose que X, Y et Z sont des ensembles finis non vides. Que peut-on dire des cardinalités de X, Y et Z si l'on sait que $Z^{X \sqcup Y} \longleftrightarrow P(X \times Y)$, qu'il existe une injection de Z dans $\{a, b, c, d, e\}$ mais aucune surjection de $\{1, 2\}$ dans Z ?
2. Soit A et B deux ensembles quelconques. Ecrire explicitement une bijection entre $P(A)^B$ et $P(B)^A$.

Solution

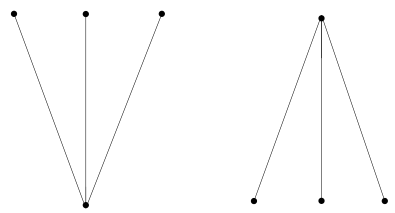
1. On pose $x = |X|$, $y = |Y|$, et $z = |Z|$. Puisqu'il existe une injection de Z dans $\{a, b, c, d, e\}$, on sait que $z \leq |\{a, \ldots, e\}| = 5$. Puisqu'il n'existe aucune surjection de $\{1, 2\}$ dans Z, on obtient $z > 2$. Donc $z \in \{3, 4, 5\}$.
   Par ailleurs, $|Z^{X \sqcup Y}| = z^{|X \sqcup Y|} = z^{x+y}$, et $|P(X \times Y)| = 2^{|X \times Y|} = 2^{xy}$. Puisqu'il existe une bijection entre les ensembles $Z^{X \sqcup Y}$ et $P(X \times Y)$, ils sont de même cardinalité, et donc $z^{x+y} = 2^{xy}$. Cette égalité implique que z doit être une puissance de 2, et on a donc forcément $z = 4$. On obtient la relation suivante entre x et y :
   $$2(x + y) = xy. \tag{1}$$
   On peut exprimer x en fonction de y comme $x = 2\frac{y}{y-2}$ pour $y \neq 2$ et chercher pour quelles valeurs de y x prend des valeurs entières positives. En utilisant le fait que la fonction $t \mapsto \frac{2t}{t-2}$ est décroissante, prend une valeur négatives si $t = 1$, n'est pas définie si $t = 2$ et $2 < \frac{2t}{t-2} < 3$ si $t > 6$, les seules options possibles sont $y = 3, 4, 5$, et on obtient trois valeurs possibles pour le triplet (x, y, z) ($y = 5$ donne un x non entier) :
   $$(x, y, z) \in \{(3, 6, 4), (4, 4, 4), (6, 3, 4)\}.$$
2. On cherche à construire une application $\phi : P(A)^B \longrightarrow P(B)^A$ qui associe à toute application $f : B \longrightarrow P(A)$ une application $\phi(f) : A \longrightarrow P(B)$. Ainsi, pour tout $a \in A$, on doit définir un sous-ensemble $\phi(f)(a)$ de B. Un candidat légitime est le suivant :
   $$\phi(f)(a) = \{b \in B \,|\, a \in f(b)\}$$
   De manière analogue, on définit $\psi : P(B)^A \longrightarrow P(A)^B$ avec
   $$\psi(g)(b) = \{a \in A \,|\, b \in g(a)\}$$
   pour toute application $g : A \longrightarrow P(B)$. On vérifie que $\psi \circ \phi = Id_{P(A)^B}$, la vérification de l'égalité $\phi \circ \psi = Id_{P(B)^A}$ est similaire :
   $$\begin{aligned} \psi \circ \phi(f)(b) &= \psi(\phi(f))(b) \\ &= \{a \in A \,|\, b \in \phi(f)(a)\} \\ &= \{a \in A \,|\, b \in \{b' \in B \,|\, a \in f(b')\}\} \\ &= \{a \in A \,|\, a \in f(b)\}, \end{aligned}$$
   où la dernière égalité vient du fait que $a \in f(b)$ si et seulement si $b \in \{b' \in B \,|\, a \in f(b')\}$ et donc $\{a \in A \,|\, b \in \{b' \in B \,|\, a \in f(b')\}\} = \{a \in A \,|\, a \in f(b)\} = f(b)$.

Problème 2 [20 points].

1. Montrer que si $(L, \leq)$ est un poset, alors la relation $\leq^*$ définie sur L par $x \leq^* y$ si et seulement si $y \leq x$ est une relation d'ordre. On pose $L^* = (L, \leq^*)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B}_{2n+1}$ le poset booléen d'ordre $2n+1$. Soient P_0 et P_1 les deux sous-posets de $\mathcal{B}_{2n+1}$ avec $E \in P_0$ si et seulement si $|E|$ est pair et $F \in P_1$ si et seulement si $|F|$ est impair. Dessiner le diagramme de Hasse de P_0 et P_1 quand $n = 1$. Montrer qu'il existe un isomorphisme de posets entre P_0 et P_1^*.
3. Démontrer que les largeurs de P_0 et de P_1 sont toutes deux égales à $\binom{2n+1}{n}$.

Solution

1. On utilise les propriétés du poset $(L, \leq)$. Pour tout $x \in L$, on a $x \leq x$, et donc $x \leq^* x$, la relation $\leq^*$ est donc réfléxive. Pour toute paire d'éléments $x, y \in L$, si $x \leq^* y$ et $y \leq^* x$, alors $y \leq x$ et $x \leq y$, et donc $x = y$, la relation $\leq^*$ est donc antisymétrique. Enfin, si trois éléments $x, y, z \in L$ vérifient $x \leq^* y$ et $y \leq^* z$, alors $y \leq x$ et $z \leq y$, ce qui implique que $z \leq x$, autrement dit, $x \leq^* z$. La relation $\leq^*$ est donc transitive.
2. Quand $n = 1$, on a $P_0 = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$ et $P_1 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1,2\}\}$, et les uniques inclusions sont celles qui suivent : $\emptyset \subset \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}$, et $\{0\}, \{1\}, \{2\} \subset \{0,1,2\}\}$. Les diagrammes de Hasse de ces posets sont donc ceux présentés ci-dessous.

   On considère l'application ensembliste $\phi : P_0 \longrightarrow P_1$ définie par $\phi(E) := \underline{2n+1} \setminus E = E^c$. Cette application est bien définie car $|\underline{2n+1} \setminus E| = 2n+1-|E|$ est impaire ($|E|$ est pair). L'application $\psi : P_1 \longrightarrow P_0$ définie par $\phi(F) := \underline{2n+1} \setminus F = F^c$ est bien définie pour les même raisons que ϕ et comme $(E^c)^c = E$, elle est l'inverse de ϕ. Ces applications sont donc des bijections. De plus, si S, T sont deux éléments de P_0, alors $S \subset T$ si et seulement si $T^c \subset S^c$, i.e., $\phi(S) \subset \phi(T)$ si et seulement si $S \subset T$, ce qui montre bien que ϕ est un isomorphise de posets.
3. Comme P_0 et P_1 sont isomorphes, ils ont la même largeur. Si n est pair, on considère les éléments de P_0 qui contiennent exactement n éléments de $\underline{2n+1}$. Il y en a $\binom{2n+1}{n}$ et ils sont deux à deux incomparables. Comme $\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor = n$, le théorème de Sperner nous garantit que cette antichaîne est maximale, sinon il existerait une antichaîne plus grande dans $\mathcal{B}_{2n+1}$. Si n est impair, on considère les éléments de P_1 qui contiennent exactement n éléments de $\underline{2n+1}$ et le même raisonnement s'applique.

Problème 3 [20 points]. Soient $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$ deux treillis finis, avec $A \cap B = \emptyset$, et soit a_M le maximum de A. On définit le poset $A \oplus B = (C, \ll)$ avec $C = (A \setminus \{a_M\}) \cup B$ et $x \ll y$ si et seulement si $x, y \in A, x \leq_A y$ ou $x, y \in B, x \leq_B y$ ou $x \in A, y \in B$.

1. Montrer que $A \oplus B$ est un treillis.
2. Trouver une antichaîne de taille maximale de $A \oplus B$ et une décomposition minimale en chaînes de $A \oplus B$ en fonction de celles de $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$.
3. Calculer la fonction de Möbius sur $A \oplus B$ en fonction de celles de $(A, \leq_A)$ et $(B, \leq_B)$.

Solution

1. On commence par vérifier que $A \oplus B$ est un poset. La relation $\ll$ est réflexive car $\leq_A$ et $\leq_B$ le sont sur A et B respectivement. La relation $\ll$ est antisymétrique sur A et sur B par antisymétrie de $\leq_A$ et $\leq_B$ et une double relation $x \ll y$ et $y \ll x$ est impossible avec $x \in A$ et $y \in B$; la relation $\ll$ est donc antisymétrique. Une paire de comparaisons $x \ll y$ et $y \ll z$ ne peut fair intervenir que 4 cas : $(x, y, z) \in A^3 \cup A^2 \times B \cup A \times B^2 \cup B^3$, tous les autres étant en contradiction avec la définition de $\ll$. Si $(x, y, z) \in A^3 \cup B^3$, $x \ll z$ par transitivité de $\leq_A$ et $\leq_B$. Si $(x, y, z) \in A^2 \times B \cup A^2 \times B$, on a trivialement $x \ll z$. La relation $\ll$ est donc transitive.

   Montrons que $C = A \oplus B$ est un treillis. Si $(x, y) \in (A \setminus \{a_M\}) \times B$, alors $\inf_C(x, y) = \min_C(x, y) = x$ est le plus grand des minorants possibles et $\sup_C(x, y) = \max_C(x, y) = y$ est le plus petit des majorants possibles. Si $(x, y) \in B^2$, comme $\inf_B(x, y)$ et $\sup_B(x, y)$ existe dans B et qu'il sont tous deux superieurs à tout élément de $A \setminus \{a_M\}$, on a $\inf_C(x, y) = \inf_B(x, y)$ et $\sup_C(x, y) = \sup_B(x, y)$. Un raisonnement analogue montre que si $(x, y) \in A^2$, on a $\inf_C(x, y) = \inf_A(x, y)$ et si $\sup_A(x, y) \neq a_M$, alors $\sup_C(x, y) = \sup_A(x, y)$. Si $(x, y) \in A^2$ avec $\sup_A(x, y) = a_M$, alors b_m, le minimum de B, est le plus petit des majorants de x, y et donc $\sup_C(x, y) = b_m$. Ces cas sont exhaustifs, et donc C est bien un treillis.

2. Comme pour toute paire $a \in A$, $b \in B$, les éléments a et b sont comparables, une antichaîne de C est forcémment contenue dans A ou dans B. Une antichaîne de taille maximale dans C est donc réalisée par une antichaîne de taille maximale dans A ou dans B. Remarquons que comme a_M est comparable avec tous les éléments de A, il ne sera dans aucune antichaîne de taille maximale de A à moins que $A = a_M$, mais alors on peut toujours prendre une antichaîne de taille maximale dans B. Par le théorème de Dilworth et ce qui précède, on sait qu'une décomposition minimale en chaînes de $A \oplus B$ contiendra $\max(\text{Largeur}(A), \text{Largeur}(B))$ chaînes. Soit

   $$A = \bigsqcup_{i=1}^{s} \Gamma_i^A \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{j=1}^{t} \Gamma_j^B$$

   des décompositions minimales en chaînes de A et B. Supposons que $s < t$, le cas $s \geq t$ se traite de manière similaire. On définit les chaînes Γ_i^C de C en posant

   $$\Gamma_i^C = \Gamma_i^A \cup \Gamma_i^B \text{ pour } i = 1, \ldots s \text{ et } \Gamma_i^C = \Gamma_i^B \text{ pour } i = s+1, \ldots t.$$

   Comme $\Gamma_i^A \ll \Gamma_i^B$, les Γ_i^C sont totalement ordonnés et forment donc bien des chaînes. Tous les Γ_i^C sont deux à deux disjoints car les Γ_i^A et Γ_i^B le sont. La décomposition est minimale car le nombre de chaînes est celui donné par le théorème de Dilworth.

3. La fonction de Möbius sur le treillis C est l'unique fonction bivariée $\mu_C : C \times C \to \mathbb{Z}$ t.q. $\mu_C(c,d) = 0$ si $c \not\ll d$ et

$$\sum_{c \ll x \ll d} \mu_C(c,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } c = d \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on se restreint au couple c, d dans $(A \setminus \{a_M\}) \cup \{b_m\}$ (on remplace a_M par b_m), on voit que $\mu_C(c,d) = \mu_A(c,d)$ par unicité de la fonction de Möbius bivariée sur A qui satisfait exactement les conditions ci-dessus. Le même raisonnement est valable pour les couples c, d dans B, $\mu_C(c,d) = \mu_B(c,d)$. Si $d \in A \setminus \{a_M\}$ et $c \in B$, alors $\mu_C(c,d) = 0$ par définition de C et μ_C. Supposons maintenant que $c \in A \setminus \{a_M\}$ et $d \in B$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{c \ll x \ll d} \mu_C(c,x) &= \sum_{c \ll x \ll b_m} \mu_C(c,x) + \sum_{b_m \ll x \ll d, x \neq b_m} \mu_C(c,x) \\ &= \underbrace{\sum_{c \ll x \ll b_m} \mu_A(c,x)}_{=0} + \sum_{b_m \ll x \ll d, x \neq b_m} \mu_C(c,x) \end{aligned}$$

Si d est un successeur immédiat de b_m, alors cette égalité montre que $\mu_C(c,d) = 0$. C'est le premier pas d'une récurrence : supposons que $\mu_C(c,d') = 0$ pour tous les $d' \neq b_m, d$ avec $b_m \ll d' \ll d$. Alors l'égalité ci-dessus et l'hypothèse de récurrence donnent

$$\mu_C(c,d) = - \sum_{\substack{x \,:\, b_m \ll x \ll d, \\ x \neq b_m, x \neq d}} \mu_C(c,x) = 0$$

En résumé, on a :

$$\mu_C(c,d) = \begin{cases} \mu_A(c,d) & \text{si } c, d \in (A \setminus \{a_M\}) \cup \{b_m\} \\ \mu_B(c,d) & \text{si } c, d \in B \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Problème 4 [20 points].

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe à n sommets. Prouver que si G est isomorphe à son graphe complémentaire, i.e. le graphe $G' = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$, alors $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$.
2. Quel est le nombre chromatique d'un arbre (justifier) ? Soient $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$ deux arbres sur le même ensemble de sommets. Soit $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Prouver que G est 4-coloriable.

Solution

1. On pose $e = |E|$ et $e' = |\binom{V}{2} \setminus E| = \binom{n}{2} - e$. Puisque G et G' sont isomorphes, on a $e = e' = \binom{n}{2} - e$, d'où
$$2e = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow e = \frac{n(n-1)}{4}.$$
Puisque $4|n(n-1)$, on doit avoir soit $4|n$, soit $4|n-1$, soit $2|n$ et $2|n-1$. Ce dernier cas ne pouvant pas se présenter puisque n et $n-1$ sont de parité différente, on a fini.
2. • Un arbre étant acyclique, il ne contient en particulier aucun cycle de taille impaire, il est alors biparti et donc 2-coloriable. On peut aussi le prouver par récurrence sur le nombre de sommets de l'arbre (en enlevant une feuille á un arbre de taille $n + 1$, on se ramène à un arbre de taille n qu'on colorie avec 2 couleurs par hypothèse de récurrence, et on donne à la feuille la couleur opposée à celle de son unique voisin).
   • Chaque G_i étant un arbre, il admet un coloriage $f_i : V \to \{0, 1\}$. On définit le coloriage f suivant de $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Soient $f' : V \to \{0, 1\}^2$ et $f'' : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1, 2, 3\}$ les deux applications définies par
$$\begin{aligned} f' : V &\to \{0,1\}^2 \\ v &\mapsto (f_1(v), f_2(v)) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} f'' : \{0,1\}^2 &\to \{0,1,2,3\} \\ (0,0) &\mapsto 0 \\ (0,1) &\mapsto 1 \\ (1,0) &\mapsto 2 \\ (1,1) &\mapsto 3. \end{aligned}$$
Alors $f'' \circ f'$ est un coloriage valide de G à 4 couleurs. En effet, pour $(v, v') \in E_1 \cup E_2$, on a soit $(v, v') \in E_1$ et dans ce cas $f'(v)$ et $f'(v')$ diffèrent sur la premiére coordonnée et donc $f(v) \neq f(v')$; soit $(v, v') \in E_2$ et dans ce cas $f'(v)$ et $f'(v')$ diffèrent sur la seconde coordonnée et donc $f(v) \neq f(v')$ également.

Problème 5 [20 points].

1. Prouver que tout graphe planaire sans triangles a un sommet de degré au plus 3.
2. Prouver que tout graphe planaire sans triangles peut être colorié avec au plus 4 couleurs.

Solution

1. Soit H un graphe planaire sans triangles. On considère une composante connexe G de ce graphe H. Si G est un arbre, il admet au moins une feuille, donc un sommet de degré $1 < 3$ et on a fini. Sinon, G est de circonférence $g \geq 4$. Soient n et e respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de G. Par un théorème du cours, on sait que

$$e \leq \frac{g}{g-2}(n-2) \leq \frac{4}{4-2}(n-2) = 2(n-2).$$

On suppose par l'absurde que G n'admet aucun sommet de degré au plus 3. Alors on a

$$2e = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 4 = 4n,$$

et donc $e \geq 2n$. On a donc $2(n-2) \geq e \geq 2n$, une contradiction. Chaque composante connexe de H admet donc un sommet de degré au plus 3.

2. On le prouve par récurrence sur le nombre de sommets du graphe. Pour un graphe à un seul sommet (trivialement planaire et sans triangles), l'assertion est claire. Pour $n \geq 1$, soit G un graphe planaire sans triangles à $n+1$ sommets. Par la question 1, on sait que G admet un sommet de degré au plus 3. En retirant un tel sommet v ainsi que toutes les arêtes qui le touchent du graphe, on obtient un graphe G' à n sommets, toujours planaire et sans triangles, qu'on peut donc colorier avec 4 couleurs par hypothèse de récurrence. Dans G, on attribue à chaque sommet distinct de v la couleur qui lui est attribuée dans le 4-coloriage de G'. v ayant au plus trois voisins, il existe au moins une couleur qui n'a pas été attribuée à l'un de ces voisins ; on colorie v avec cette couleur.

Problème 6 [20 points]. Pour toute suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on définit la suite Δv des *différences finies* de v, par $\Delta v_n := v_{n+1} - v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On note $\Delta^2 v = \Delta(\Delta v)$. Soit u la solution de l'équation

$$6\Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_n\,,\ \forall n \geq 1$$

avec les conditions initiales $u_0 = 3, u_1 = 2, u_2 = 14$. Soit F la série génératrice des u_i, $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$.

1. Montrer que $F = \frac{3-4x-5x^2}{1-2x-5x^2+6x^3}$.
2. Trouver une forme close pour les u_n.

Solution

1. Soit $w_n = u_{n+1} - u_n$, alors $\Delta^2 u_n := \Delta w_n = w_{n+1} - w_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, et donc l'équation devient $6(u_n - u_{n-1}) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$, et alors $u_{n+2} - 2u_{n+1} - 5u_n + 6u_{n-1} = 0$, $\forall n \geq 1$. On doit donc trouver une expression rationnelle pour la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ où $u_{n+3} - 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$, $\forall n \geq 0$. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3}x^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2}x^{n+3} - 5\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}x^{n+3} + 6\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+3} = 0$$

et donc

$$F - (3 + 2x + 14x^2) - 2x(F - (3 + 2x)) - 5x^2(F - 3) + 6x^3 F = 0$$

qui donne $(1 - 2x - 5x^2 + 6x^3)F = 3 - 4x - 5x^2$, et le résultat attendu s'ensuit.

2. On décompose en élément simple la fraction rationelle $\frac{3-4x-5x^2}{1-2x-5x^2+6x^3}$. On commence par factoriser le dénominateur qui possède la racine évidente 1 (par division euclidienne par exemple) : $1-2x-5x^2+6x^3 = (1-x)(1-x-6x^2)$. Les racines du polynôme $1-x-6x^2$ sont $-1/2$ et $1/3$ et donc $1-2x-5x^2+6x^3 = 6(x-1)(x-1/3)(x+1/2) = (1-x)(1-3x)(1+2x)$. On cherche alors A, B, C tels que

$$\frac{3 - 4x - 5x^2}{1 - 2x - 5x^2 + 6x^3} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 - 3x} + \frac{C}{1 + 2x}. \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de (2) par $(1 - x)$ puis en avaluant les fonctions rationnelles en $x = 1$, on obtient $A = (-6)/(-6) = 1$. En faisant de même avec $1 - 3x$ et en avaluant en $x = 1/3$, puis faisant de même avec $1 + 2x$ et en évaluant en $x = -1/2$, on obtient $B = 1$ et $C = 1$ (on peut aussi résoudre un système linéaire à trois inconnus pour trouver A, B et C). Finalement

$$\frac{3 - 4x - 5x^2}{1 - 2x - 5x^2 + 6x^3} = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - 3x} + \frac{1}{1 + 2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(1 + 3^n + (-2)^n)x^n$$

et donc $u_n = 1 + (-2)^n + 3^n$.