Exercice 1.1. On rappelle que la *différence symmétrique* de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble X est définie comme
$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
Montrer que :

(a) $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(b) Si C est un sous-ensemble de X, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$, c'est-à-dire que l'opération est associative, et on peut donc sans équivoque ne pas écrire les parenthèses.

(c) Soient $F_1, \dots, F_n$, $n \geq 2$ sous-ensembles de X et soit $F = F_1 \,\Delta\, F_2 \,\Delta \dots \Delta\, F_n$. Démontrer que
$$x \in F \iff |\{i \in \mathbb{N} \mid x \in F_i\}| \text{ est impair}.$$

Exercice 1.2. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble X. Si elles sont vraies, démontrer les relations suivantes et trouver un contre-exemple dans les cas contraires :

(a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

(b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Exercice 1.3. Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Montrer que f est une bijection (i.e., injective et surjective) si et seulement si il existe une application $g : B \longrightarrow A$ avec $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

Exercice 1.4. Soient A, B, C, A', B' et C' des sous-ensembles non-vides d'un ensemble fini X qui vérifient $A \times B \leftrightarrow A' \times B'$ et $B \times C \leftrightarrow B' \times C'$. Démontrer les relations suivantes si elles sont vraies, trouver un contre-exemple dans le cas contraire :

(a) $A \times C \leftrightarrow A' \times C'$

(b) $A \times C' \leftrightarrow A' \times C$

Exercice 1.5. Soient A, B et C trois sous-ensembles non vides d'un ensemble X. Démontrer les relations suivantes :

(a) $A^{B\times C} \leftrightarrow \left(A^B\right)^C$

(b) $(A \times B)^C \leftrightarrow A^C \times B^C$

(Remarquer que l'ensemble X n'est pas nécessairement fini.)

Exercice 1.6.

Soit $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble X. On définit les deux sous-ensembles de X suivants :
$$\liminf_{n\to\infty} X_n := \bigcup_{m=0}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} X_n\right)$$
$$\limsup_{n\to\infty} X_n := \bigcap_{m=0}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} X_n\right)$$

(a) Montrer que

i) $\liminf_{n\to\infty} X_n = \{x \in X \mid x \in X_i \text{ toujours sauf pour un nombre fini de } i\}$,

ii) $\limsup_{n\to\infty} X_n = \{x \in X \mid x \in X_i \text{ pour un infinité de } i\}$.

(b) Montrer que
$$\liminf_{n\to\infty} X_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

(c) Calculer les $\liminf$ et $\limsup$ dans les cas suivants (on pourra utiliser (a) et le résultat de l'exercice 1.1(c) si besoin) :

i) $X_k = \{(-1)^k\}$, $k \in \mathbb{N}$.
ii) $X_0 = \mathbb{N}$ et pour $k > 0$, $X_k = X_{k-1} \,\Delta\, \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}$.
iii) $X_0 = \emptyset$ et pour $k > 0$, $X_k = X_{k-1} \,\Delta\, k\mathbb{Z}$,
où $k\mathbb{Z}$ dénote l'ensemble de tous les multiples entiers de k, c'est-à-dire que

$$k\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour *iii)*, on rappelle que si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier n est donnée par $n = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$, alors le nombre de diviseurs de n est $\prod_{i=1}^{t}(e_i + 1)$.