Exercice 3.1.

1. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.
2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit $\leq_2$, i.e.,

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \leq_2 (x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Soit C_1 le disque ouvert de rayon 1 centré sur l'origine, $C_2 = [-1,0] \times [-1,0]$ et $C = C_1 \cup C_2$. Etudier l'existence pour C de minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, plus petit élément, plus grand élément.

Exercice 3.2. Démontrer les assertions suivantes :

1. Soit $(E, \leq)$ un poset et $F \subseteq E$. Alors $(F, \leq)$ est un poset, appelé *sous-poset de E*.
2. Soit $(E, \leq)$ un poset. Alors $(E, \leq)$ est isomorphe à un sous-poset de $(P(E), \subseteq)$.
3. Soient $\leq_1$ et $\leq_2$ deux relations d'ordre sur P. Soit $\leq_{12} = \leq_1 \cap \leq_2$ la relation sur P définie par $a \leq_{12} b$ si et seulement si $a \leq_1 b$ et $a \leq_2 b$. Alors $\leq_{12}$ est une relation d'ordre. De manière générale, si $\leq_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont des relations d'ordre sur P, on définit $\ll = \bigcap_{i=1}^n \leq_i$ sur P par $x \ll y \Longleftrightarrow \forall i, x \leq_i y$.

Exercice 3.3. Soit $(P, \leq)$ un poset fini. On rappelle qu'une relation d'ordre $\leq_1$ *étend* la relation $\leq$ si $\forall x, y \in P$, $x \leq y \Rightarrow x \leq_1 y$. La relation d'ordre $\leq_1$ est une *extension linéaire* de $\leq$ si $\leq_1$ étend $\leq$ et $\leq_1$ est un ordre total sur P.

1. Soit $a, b \in P$ avec $a||b$. Montrer qu'il existe une extension linéaire $\leq_1$ de $\leq$ qui vérifie $b \leq_1 a$. (Indication : soit $A = \{x | a \leq x\}$. Ordonner linéairement A et $P \setminus A$ en respectant $\leq$, puis fusionner ces deux ordres totaux. Où se trouve b ?).
2. Soient $\leq_1, \ldots, \leq_n$ des relations d'ordre total sur P et $\ll = \bigcap_{i=1}^n \leq_i$ (c.f. Exercice 3.2 pour la définition). Montrer que deux éléments a et b sont incomparables pour $\ll$ si et seulement si il existe $\leq_i$ et $\leq_j$ avec $a <_i b$ (dans le sens où $a \leq_i b$ et $a \neq b$) et $b <_j a$.
3. Soit L l'ensemble des extensions linéaires de $\leq$. Montrer que $\leq = \bigcap\limits_{\leq_i \in L} \leq_i$.
4. On appelle *dimension linéaire* de $(P, \leq)$ le nombre minimal n d'extensions linéaires $\leq_i$, $i = 1, \ldots n$ de $\leq$ telles que $\leq = \bigcap_{i=1}^n \leq_i$. Trouver les dimensions linéaires des posets suivants :
   (a) $(\{a_0, \ldots, a_n\}), \leq)$ avec $a_i || a_j$ si $i \neq j$.
   (b) $(\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}, \subseteq)$.
   (c) $(\mathrm{Div}(6), |)$.

Exercice 3.4. On cherche à démontrer que la dimension linéaire de $(\mathrm{Div}(30), |)$ est 3.

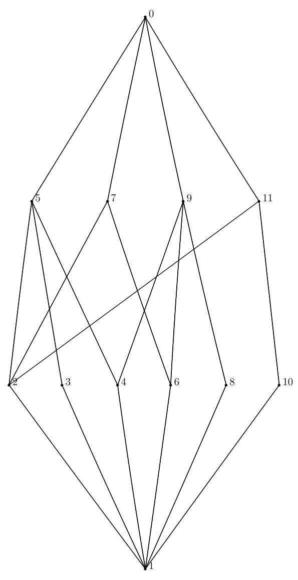
1. Trouver trois ordres linéaires $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ sur $\mathrm{Div}(30)$ avec $| = \leq_1 \cap \leq_2 \cap \leq_3$ (on pourra s'inspirer du diagramme de Hasse de $(\mathrm{Div}(30), |)$).
2. On suppose par l'absurde que $| = \leq_1 \cap \leq_2$ avec $\leq_1, \leq_2$ des ordres linéaires. Soient a, b, c tels que $\{a, b, c\} = \{2, 3, 5\}$. Montrer que

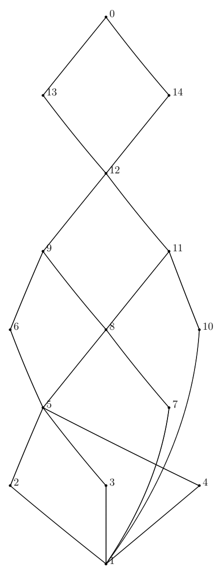
$$a \leq_1 b \leq_1 c \Longrightarrow c \leq_2 b \leq_2 a.$$

3. Montrer alors que $b | ac$ et conclure.

Exercice 3.5. On donne les posets $P1$ et $P2$ par leur diagramme de Hasse ci-dessous.

1. Pour chacun de ces posets, en calculer une extension linéaire.
2. Calculer les valeurs de leur fonction de Moebius bivariée $\mu_1(1, a_1)$ et $\mu_2(1, a_2)$ quand $a_1 \in P_1$ et $a_2 \in P_2$.


0
5
7
9
11
2
3
4
6
8
10
1


0
13
14
12
9
11
6
8
10
5
7
2
3
4
1