Exercice 4.1.

1. Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un treillis fini. Montrer qu'il existe toujours un maximum et un minimum dans $\mathcal{L}$.
2. Soient $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ deux treillis munis de leur infima et suprema respectifs $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$. Si $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ est un isomorphisme de poset, montrer que $\forall x, y \in \mathcal{L}_1, f(x \wedge_1 y) = f(x) \wedge_2 f(y)$ et $f(x \vee_1 y) = f(x) \vee_2 f(y)$.
3. Soient $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ deux treillis munis de leur infima et suprema respectifs $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$ et soit $(\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2, \leq_{12})$ leur produit cartesien. Calculer l'infimum et le supremum $\wedge_{12}$, $\vee_{12}$ de $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ en fonction de $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$.

Exercice 4.2. Soit $m > 0$ et $n > 0$ deux entiers premiers entre eux. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathrm{Div}(mn), |) & \longrightarrow & (\mathrm{Div}(m), |) \times (\mathrm{Div}(n), |) \\ d & \longmapsto & (\mathrm{pgcd}(d, m), \mathrm{pgcd}(d, n)), \end{array}$$

est un isomorphime de posets (on rappelle que $(\mathrm{Div}(m), |) \times (\mathrm{Div}(n), |)$ désigne le poset $(\mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n), \leq_2)$ avec $(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2)$ ssi $a_1 \mid a_2$ dans $(\mathrm{Div}(m), |)$ et $b_1 \mid b_2$ dans $(\mathrm{Div}(n), |)$).

Exercice 4.3. Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un treillis fini. Soit $\ll$ une extension linéaire de $\leq$ avec $\mathcal{L} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $a_i \ll a_j$ si $i \leqslant j$. Soit encore Z la matrice carrée de taille n avec $Z_{ij} = 1$ si $a_i \leq a_j$ et $Z_{ij} = 0$ sinon.

1. On pose $N = Z - I_n$. Montrer que $N^n = 0$ et que
$$(I_n + N)(I_n - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{n-1} N^{n-1}) = I_n.$$
2. Pour $k \geq 1$, une liste d'inégalités strictes $a < a_{t_1} < a_{t_2} < a_{t_3} < \ldots < a_{t_{k-1}} < b$ est appelée une chaîne de taille k entre a et b dans $\mathcal{L}$. On note $c_k(a, b)$ le nombre total de telles chaînes et on pose $c_0(a, b) = 1$ si et seulement si $a = b$. Montrer que $(N^k)_{ij} = c_k(a, b)$ pour tout $k \geq 0$ (où $a = a_i$ et $b = a_j$).
3. Montrer que si μ est la fonction de Möbius bivariée sur $(\mathcal{L}, \leq)$, alors
$$\mu(a, b) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k(a, b).$$

Exercice 4.4.

1. Soit un poset fini $(P, \leq)$ qui contient une antichaîne de taille maximale s et ne possède aucune chaîne de plus de t éléments. Montrer que $|P| \leq st$.
2. Démontrer le Théorème d'Erdös-Szekeres : Soient a et b deux entiers. Toute suite d'au moins $ab+1$ nombres réels contient soit une sous-suite croissante de longueur $a+1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $b+1$ (Indication : ordonner la suite en fonction de la taille des nombres réels et de leur position dans la suite).