Pour les exercices 5 et 8, on rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$.

**Exercice 5.1.** Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de $E$ est pris dans $V \times V$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

**Exercice 5.2.** Soit $G$ un graphe sur $n$ sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que $G$ est connexe.

**Exercice 5.3.** Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

**Exercice 5.4.** Soit $d \geq 3$. Montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe $d$-régulier sur $n$ sommets ne peut dépasser $c \log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante $c$.

**Exercice 5.5.** Soit $G$ un graphe avec $n$ sommets et $m$ arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que $G$ contient un triangle (un cycle de longueur 3).
(**Indication :** Si $(u, v)$ est une arête et que $u$, $v$ n'ont pas de voisin commun, trouver une relation entre $\deg u$, $\deg v$ et $n$ et sommer cette relation.)

**Exercice 5.6.** (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout $i$. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

**Exercice 5.7.** Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que $G$ est un graphe régulier, c'est-à-dire que tout les sommets de $G$ sont de même degré. (Indice : choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble $A$ des voisins de $a$ différents de $b$ et l'ensemble $B$ des voisins de $b$ différents de $a$).

**Exercice 5.8.** Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe des arêtes* de $G$ est le graphe

$$L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E \text{ et } (b, c) \in E\}.$$

1. Si la somme des degrés des sommets de $G$ est $s$, quel est le nombre de sommets de $L(G)$ ?
2. Supposons que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$. Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes $G$ est-il isomorphe à $L(G)$ ? Justifier la réponse.