Exercice 7.1. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \dots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$.

Exercice 7.2. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = 2a_n + 1$.
2. $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + 2^n$.

Exercice 7.3. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

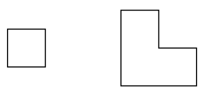
1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment ?

Exercice 7.4. Calculer la somme

$$\sum_{u=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} .$$

(Indice : exprimer cette somme comme un coefficient d'un produit de deux polynômes).

Exercice 7.5. On considère un rectangle de taille $n \times 2$. On note R_n le nombre de pavages du rectangle par les pièces dessinées ci-dessous et orientées dans n'importe quel sens. Par convention, $R_0 = 1$.



1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+3} = R_{n+2} + 4R_{n+1} + 2R_n$ et que $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 11$.
2. Exprimer la série génératrice $S(x)$ de la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous forme d'une fraction rationnelle.
3. Donner une forme close de R_n et un équivalent asymptotique de R_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.6. Soit $\exp \in \mathbb{R}[[x]]$ la série formelle définie par

$$exp = exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$$

On écrit par convention $exp(x) = e^x$. Montrer que

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^{a+x} = e^a \cdot e^x$ dans $\mathbb{R}[[x]]$,
2. $\frac{1}{exp}$ existe et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Exercice 7.7. Fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

1. Vérifier que $\frac{e^x-1}{x}$ est un élément de $\mathbb{R}[[x]]$ qui admet un inverse. On écrit

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Les nombres B_k sont les nombres de Bernoulli.

2. Montrer que $B_0 = 1$ et que les nombres de Bernoulli satisfont l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \forall n \geq 1.$$

puis calculer B_k pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

3. Montrer que $B_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$ (indication : montrer que $P(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$ est une série fomelle paire, i.e. $P(x) = P(-x)$, et conclure).