Exercices Récapitulatifs

Exercice ER.1. Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit $\binom{A}{k}$ l'ensemble des sous-ensembles de A qui contiennent exactement k éléments.

1. Soit $x \in E \setminus A$. Montrer que $\binom{A\cup\{x\}}{k+1} \longleftrightarrow \binom{A}{k+1} \sqcup \binom{A}{k}$.
2. Montrer que
$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} \longleftrightarrow 2^A$$
quand A est un ensemble fini.
3. Montrer que la relation ci-dessus est fausse quand $A = \mathbb{N}$.

Solution ER.1.

1. On commence par remarquer que $\binom{A}{k+1} \cap \binom{A}{k} = \emptyset$, et donc
$$\binom{A}{k+1} \sqcup \binom{A}{k} \longleftrightarrow \binom{A}{k+1} \cup \binom{A}{k}$$
et qu'il suffit alors de montrer que $\binom{A\cup\{x\}}{k+1} \longleftrightarrow \binom{A}{k+1} \cup \binom{A}{k}$. Pour ce faire on définit les deux applications φ et ψ suivantes :
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \binom{A\cup\{x\}}{k+1} & \longrightarrow & \binom{A}{k+1} \cup \binom{A}{k} \\ & S & \longmapsto & \varphi(S) \end{array}$$
où
$$\varphi(S) = \begin{cases} S & \text{si } x \notin S \\ S \setminus \{x\} & \text{si } x \in S \end{cases}$$
et
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \binom{A}{k+1} \cup \binom{A}{k} & \longrightarrow & \binom{A\cup\{x\}}{k+1} \\ & T & \longmapsto & \psi(T) \end{array}$$
où
$$\psi(T) = \begin{cases} T & \text{si } |T| = k+1 \\ T \cup \{x\} & \text{si } |T| = k \end{cases}$$
On a
$$\begin{aligned} \varphi(\psi(T)) &= \begin{cases} \varphi(T) & \text{si } |T| = k+1 \\ \varphi(T \cup \{x\}) & \text{si } |T| = k \end{cases} \\ &= \begin{cases} T & \text{si } |T| = k+1 \\ (T \cup \{x\}) \setminus \{x\} & \text{si } |T| = k \end{cases} \\ &= T \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \psi(\varphi(S)) &= \begin{cases} \psi(S) & \text{si } x \notin S \\ \psi(S) \setminus \{x\} & \text{si } x \in S \end{cases} \\ &= \begin{cases} S & \text{si } x \notin S \\ (S \setminus \{x\}) \cup \{x\} & \text{si } x \in S \end{cases} \\ &= S \end{aligned}$$
et donc $\varphi \circ \psi = Id$ et $\psi \circ \varphi = Id$.

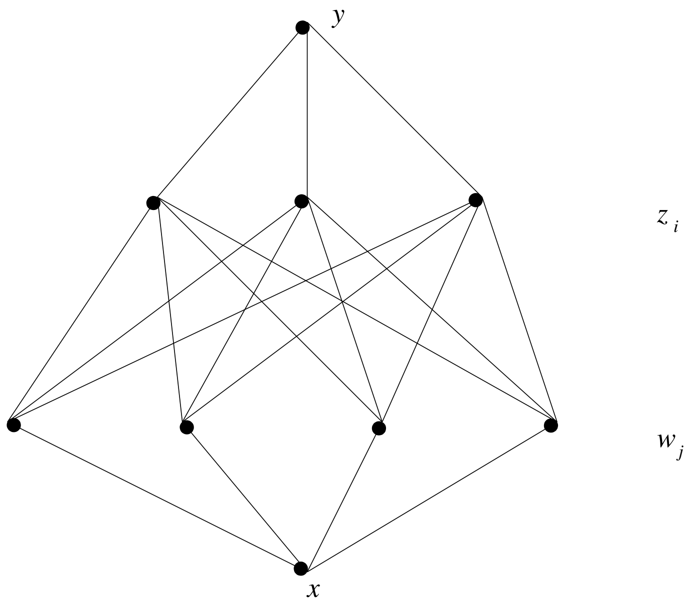
2. Comme $2^A \longleftrightarrow P(A)$, il suffit de montrer que
$$\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} = P(A)$$
quand A est un ensemble fini. Clairement, on a que $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k} \subset P(A)$ car chaque ensemble $\binom{A}{k}$ est un sous-ensemble de $P(A)$. De plus, comme A est fini, tout sous-ensemble S de A est fini et est donc contenu dans $\binom{A}{|S|}$, ce qui montre que $P(A) \subset \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{A}{k}$.
3. On montre que les deux ensembles ont des cardinalités differentes et ne peuvent donc pas être en bijection l'un avec l'autre. Tout d'abord on sait que $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable (c'est un résultat du cours). Ensuite, chaque ensemble $\binom{\mathbb{N}}{k}$ est dénombrable car il s'injecte dans $\mathbb{N}^k$ qui est dénombrable : à tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_k\}$, où les x_i sont ordonnés de manière croisante,i.e., $x_i < x_j$ dès que $i < j$, on associe le vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$. Il s'ensuit que $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \binom{\mathbb{N}}{k}$ est dénombrable car c'est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Exercice ER.2. Soit $P = \{x, w_0, w_1, \ldots, w_m, z_0, z_1, \ldots, z_n, y\}$ un ensemble à $m + n + 4$ éléments avec la structure de poset définie par $x < w_j < z_i < y$, $\forall i, j$, et où aucune autre relation n'est vraie.

1. Dessiner le diagramme de Hasse de P quand $n = 2, m = 3$.
2. Pour tout $m, n \geq 0$, trouver la largeur de P et trouver une décomposition minimale en chaînes de P.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un treillis, puis calculer dans ces cas toutes les valeurs de la fonction de Möbius bivariée μ sur P.

Solution ER.2.

1. Le diagramme de Hasse de P dans le cas $(n, m) = (2, 3)$ est le suivant :



2. La largeur du poset P est $\max(m + 1, n + 1)$, donné par la plus longue des deux listes d'éléments incomparables $\{z_i\}_{i=0,\ldots,n}$ ou $\{w_j\}_{j=0,\ldots,m}$. En effet soit $\mathcal{A}$ une antichaîne de P. Si x ou y est dans $\mathcal{A}$, alors $|\mathcal{A}| = 1$, car x et y sont comparables à tous les autres éléments. Si $z_i \in \mathcal{A}$, alors $|\mathcal{A}| \leq n + 1$ car aucun des w_j, et ni x et y ne peuvent être dans $\mathcal{A}$. De même pour $|\mathcal{A}| \leq m + 1$, la conclusion s'ensuit.

Par le théorème de Dilworth, on sait qu'une décomposition minimale en chaînes de P contient $\max(n+1, m+1)$ chaînes. Soit $m > n$, le cas $n \geq m$ se traite de manière similaire. On considère les chaînes suivantes :

(a) la chaine $x < w_0 < z_0 < y$

(b) les chaînes $w_i < z_i$ pour $i = 1, \ldots, n$

(c) les chaînes constituées des uniques éléments w_j pour $j = n+1, \ldots, m$

On totalise bien $1 + n + (m - n) = m + 1$ chaînes, et la décomposition est donc minimale.

3. On montre que P est un treillis si et seulement si $m = 0$ ou $n = 0$. Dans le cas contraire, z_0 et z_1 sont des majorants de w_0 et w_1 et ils sont incomparables. Ainsi le supremum de w_0 et w_1 n'existe pas et P n'est pas un treillis. Vérifions que dans le cas $n = 0$, le poset P est bien un treillis, le cas $m = 0$ est similaire. Comme z_0 est l'unique plus petit majorant des w_i, et x est naturellement le plus grand minorant des w_i, $\sup(w_i, w_k) = z_0$ et $\inf(w_i, w_k) = x$ sont toujours bien définis. Dans tous les autres cas, $\sup(a, b) = \max(a, b)$ et $\inf(a, b) = \min(a, b)$, car a et b sont alors toujours comparables.

   Le calcul de la fonction de Möbius bivariée sur P dans le cas $n = 0$ (le cas $m = 0$ est similaire) se fait sans surprise par récurrence en utilisant la propriété principale de cette fonction :

$$\begin{aligned}
\mu(a,b) &= 0 \quad \text{si } a \not< b \\
\mu(a,b) &= 1 \quad \text{si } a = b \\
\mu(a,b) &= -\sum_{c : a \leq c < b} \mu(a,c) \quad \text{si } a < b
\end{aligned}$$

Calcul de $\mu(x, .)$:

$$\begin{aligned}
\mu(x,x) &= 1 \\
\mu(x,w_i) &= -\mu(x,x) = -1 \\
\mu(x,z_0) &= -\mu(x,x) - \sum_{i=0}^{m} \mu(x,w_i) = -1 - ((m+1)\cdot(-1)) = m \\
\mu(x,y) &= -\mu(x,x) - \sum_{i=0}^{m} \mu(x,w_i) - \mu(x,z_0) = -1 - (m+1)\cdot(-1) - m = 0
\end{aligned}$$

Calcul de $\mu(w_i, .)$:

$$\begin{aligned}
\mu(w_i,w_i) &= 1 \\
\mu(w_i,z_0) &= -\mu(w_i,w_i) = -1 \\
\mu(w_i,y) &= -\mu(w_i,w_i) - \mu(w_i,z_0) = 0
\end{aligned}$$

Calcul de $\mu(z_0, .)$:

$$\begin{aligned}
\mu(z_0,z_o) &= 1 \\
\mu(z_0,y) &= -\mu(z_0,z_0) = -1
\end{aligned}$$

Pour toutes les autres valeurs, on a $\mu(a, b) = 0$.

Exercice ER.3.

1. Montrer que tout graphe simple planaire connexe à e arêtes et $v \geq 3$ sommets vérifie $e \leq 3v - 6$ (Indication : séparer les cas où G est un arbre ou pas).
2. Montrer que tout graphe simple planaire a un sommet de degré au plus 5.

Solution ER.3.

1. Si G est un arbre, on a $e = v - 1 \leq 3v - 6$ dès que $v \geq 3$. Sinon, G possède un cycle, et a donc une circonférence $g \geq 3$. De plus on sait que $e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$. Comme la fonction $g \mapsto \frac{g}{g-2}$ est décroissante, on a
$$e \leq \frac{g}{g-2}(v-2) \leq \frac{3}{3-2}(v-2) = 3v - 6.$$
2. On travaille sur une composante connexe du graphe dont les sommets forment l'ensemble V avec $|V| = v \geq 3$. Si aucune composante connexe ne vérifie cette condition, elles sont toutes des arbres à deux sommets, et le résutat s'ensuit. On suppose par l'absurde que sur cette composante connexe tout sommet a un degré strictement supérieur à 5. Alors on a
$$2e = \sum_{x \in V} \deg(x) \geq 6v$$
et donc $3v \leq e \leq 3v - 6$ qui est une contradiction.

Exercice ER.4. On considère l'ensemble des mots formés à partir des seules lettres a, b, c et d dans lesquels les lettres a et b ne sont jamais juxtaposées.

1. Soit x_n le nombre de mots formés de n lettres qui se terminent par c ou d et y_n le nombre de mots formés de n lettres qui se terminent par a ou b. Montrer que
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 2x_n + 2y_n \\ y_{n+1} & = & 2x_n + y_n \end{array} \right.$$
2. Déduire du point précédent que si z_n est le nombre de mots formés de n lettres, alors
$$z_{n+1} = 3z_n + 2z_{n-1}$$
3. Trouver une forme close pour z_n.

Solution ER.4.

1. Si on a un mot de $n-1$ lettres dans lequel les lettres a et b ne sont pas juxtaposées, on peut lui apposer une n-ième lettre qui sera
   – c ou d ou a si la dernière lettre du mot est un a
   – c ou d ou b si la dernière lettre du mot est un b
   – c ou d ou a ou b si la dernière lettre du mot est un c
   – c ou d ou a ou b si la dernière lettre du mot est un d.
   En comptabilisant les différentes possibilités, on voit que $x_{n+1} = 2x_n + 2y_n$ et $y_{n+1} = 2x_n + y_n$.
2. Comme $z_n = x_n + y_n$, en sommant les égalités ci-dessus, on trouve $z_{n+1} = 3z_n + x_n$ et comme $x_n = 2x_{n-1} + 2y_{n-1} = 2z_{n-1}$, finalement on obtient $z_{n+1} = 3z_n + 2z_{n-1}$.
3. Soit f la série génératrice des z_n, i.e., $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n x^n$. On reconnaît facilement $z_1 = 4$, et z_2 se trouve en énumerant les différents mots admissibles de 2 lettres :
$$aa, ac, ad, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd$$

et donc $z_2 = 14$. On aimerait définir z_0 de telle sorte que le récurrence linéaire des z_i ne soit pas violée, et donc $14 = 3 \cdot 4 + 2z_0$ donne $z_0 = 1$. On travaille sur la récurrence linéaire pour arriver à une égalité entre séries formelles :

$$\begin{aligned}
z_{n+1} = 3z_n + 2z_{n-1},\ n \geq 1 \quad &\Longrightarrow \quad z_{n+1}x^{n+1} = 3z_n x^{n+1} + 2z_{n-1}x^{n+1},\ n \geq 1 \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} z_{n+1}x^{n+1} = 3x \sum_{n\geq 1} z_n x^n + 2x^2 \sum_{n\geq 1} z_{n-1}x^{n-1} \\
&\Longrightarrow \quad f - 1 - 4x = 3x(f-1) + 2x^2 f \\
&\Longrightarrow \quad f = \frac{1+x}{1-3x-2x^2}
\end{aligned}$$

On cherche à décomposer f en éléments simples :

$$f = \frac{1+x}{1-3x-2x^2} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}$$

Les réels a et b se trouvent en factorisant $1-3x-2x^2$:

$$1-3x-2x^2 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} = \alpha_{0,1}$$

et alors

$$1-3x-2x^2 = -2(x-\alpha_0)(x-\alpha_1) = -2\alpha_0\alpha_1(1-\alpha_0^{-1}x)(1-\alpha_1^{-1}x).$$

On vérifie sans peine que $\alpha_0\alpha_1 = -1/2$ et $\alpha_{0,1}^{-1} = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, ce qui donne

$$1-3x-2x^2 = \left(1 - \frac{3+\sqrt{17}}{2}x\right)\left(1 - \frac{3-\sqrt{17}}{2}x\right)$$

et finalement

$$f = \frac{1+x}{1-3x-2x^2} = \frac{A}{1-\frac{3+\sqrt{17}}{2}x} + \frac{B}{1-\frac{3-\sqrt{17}}{2}x}.$$

Les entiers A et B satisfont au système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + B & = & 1 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}A + \frac{3+\sqrt{17}}{2}B & = & -1 \end{array}\right.$$

dont les solutions sont $A = \frac{17+5\sqrt{17}}{34}$ et $B = \frac{17-5\sqrt{17}}{34}$. Ainsi

$$f = \frac{17+5\sqrt{17}}{34} \cdot \frac{1}{1-\frac{3+\sqrt{17}}{2}x} + \frac{17-5\sqrt{17}}{34} \cdot \frac{1}{1-\frac{3-\sqrt{17}}{2}x}.$$

ce qui, en utilisant l'égalité de séries formelles $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n\geqq 0} a^n x^n$, donne

$$f = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{17+5\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{17-5\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right) x^n$$

et donc

$$z_n = \frac{17+5\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{17-5\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$