ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

**Examen final** 25.01.2012

# Mathématiques discrètes

**25.01.2012**

- Utilisez une feuille différente pour chaque problème et numérotez les pages.
- Ecrivez votre nom et le numéro du problème traité en haut de chaque feuille supplémentaire.
- L'usage de documents et de matériel électronique est prohibé durant cette épreuve. Seul un formulaire personnel rédigé sur une feuille A4 recto-verso est toléré ainsi qu'un dictionnaire de traduction vers votre langue maternelle dépourvu d'annotations.
- Les résultats des questions intermédiaires peuvent être admis pour la suite de chaque problème.
- La durée de l'épreuve est de trois heures. Bonne chance.

**Nom :**

| Problème 1 | Problème 2 | Problème 3 | Problème 4 | Problème 5 | Problème 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 points | 15 points | 20 points | 15 points | 20 points | 15 points |

| **Total** |
|---|
| 100 points |

***Problème 1 [15 points].*** Soit $G$ un graphe planaire connexe à $n \geq 3$ sommets, contenant 4 ponts, contenant au moins un cycle, et de circonférence $g$.

1. Soit $f_\ell$ le nombre de faces à $\ell$ arêtes. Prouver que $\sum_\ell \ell f_\ell \leq 6n - 16$.
2. Prouver que $g \leq 3n - 8$.

**Indication :** Un théorème similaire a été prouvé en classe.

**Solution :**

1. Soit $e$ le nombre d'arêtes de $G$ et $f$ le nombre de faces. Dans la somme $\sum_\ell \ell f_\ell$, chaque arête est comptée 2 fois, sauf les ponts qui sont comptés une seule fois. D'où

$$\sum_\ell \ell f_\ell = 2e - 4 \leq 2(3n - 6) - 4 = 6n - 16,$$

   où l'inégalité suit du fait que $e \leq 3n - 6$ pour un graphe planaire et connexe à $n \geq 3$ sommets.

2. Puisque chaque face a au moins $g$ arêtes, $\sum_\ell \ell f_\ell \geq gf$, et par la formule d'Euler, $f - e + n = 2$. Donc

$$g(2 + e - n) \leq 6n - 16,$$

   ce qui implique que

$$g \leq \frac{6n - 16}{2 + e - n}.$$

   Or $G$ étant connexe et contenant au moins un cycle, $e \geq n$. Donc

$$g \leq \frac{6n - 16}{2 + e - n} \leq \frac{6n - 16}{2} = 3n - 8.$$

***Problème 2 [15 points].*** On dispose de 4 pièces de 1 CHF, d'une quantité illimitée de pièces de 2 CHF, et d'une quantité illimitée de pièces de 5 CHF. Soit $A_n$ le nombre de combinaisons de pièces qu'on peut former pour payer $n$ CHF, où $n \in \mathbb{N}$. Trouver une formule close pour $A_n$.

**Indication :** Utiliser les fonctions génératrices.

**Solution :** Soit $S_1 = \{0,1,2,3,4\}$, $S_2 = \{2\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$, et $S_3 = \{5\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$. On s'intéresse à $A_n := |\{(i,j,k) \in S_{123} \mid i+j+k = n\}|$. On écrit les fonctions génératrices caractéristiques des ensembles $S_1$, $S_2$ et $S_3$ :

$$\begin{aligned} C_{S_1} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x} \\ C_{S_2} &= \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \\ C_{S_3} &= \sum_{n\geq 0} x^{5n} = \frac{1}{1-x^5}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} A_n x^n &= \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1+x)}. \end{aligned}$$

Un calcul simple nous donne $A = 1/4$, $B = 1/2$, $C = 1/4$, d'où

$$A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}(-1)^n.$$

***Problème 3 [20 points].*** Soient $m$ et $n$ des entiers positifs, et pour $j = 1, \ldots, mn+1$, soient $a_j \leq b_j$ des nombres réels. Soit $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ l'intervalle fermé entre $a_j$ et $b_j$. De plus, soit $\mathcal{I} = \{I_j\}_{j=1}^{mn+1}$. Prouver que soit il existe $m+1$ intervalles $I_{i_0}, \ldots, I_{i_m}$ disjoints deux à deux, soit il existe $n+1$ intervalles $I_{j_0}, \ldots, I_{j_n}$ d'intersection non vide.

**Indication :** Utiliser le théorème de Dilworth.

**Solution :** On définit un ordre partiel sur $\mathcal{I}$ comme suit : $I_j \trianglelefteq I_k$ si et seulement si $b_j \leq a_k$. On vérifie facilement qu'une chaîne du poset $(\mathcal{I}, \trianglelefteq)$ correspond à des intervalles disjoints deux à deux. On suppose qu'il n'existe pas de chaîne de taille $m+1$. Il nous faut donc au moins $\lceil \frac{mn+1}{m} \rceil = n+1$ chaînes pour couvrir tout le poset. Par le théorème de Dilworth, on sait donc qu'il existe une antichaîne $I_{j_0}, \ldots, I_{j_n}$ de taille $n+1$. Soit $a := \max_k\{a_{j_k}\}$ et $b := \min_k\{b_{j_k}\}$. On doit avoir $a \leq b$, sinon il y aurait deux intervalles $I_{j_\ell}$ et $I_{j_t}$ disjoints (les intervalles correspondant respectivement à $\ell = \text{argmax}\{a_{j_k}\}$ et $t = \text{argmin}\{b_{j_k}\}$). Mais alors tous les intervalles $I_{j_0}, \ldots, I_{j_n}$ contiennent $[a, b]$ et ont donc une intersection non vide.

***Problème 4 [15 points].*** Soit $G = (V, E)$ un graphe à $n$ sommets et $m$ arêtes dépourvu de triangles (c'est-à-dire de cycles de taille 3).

(1) Borner le degré maximal de n'importe quel sommet de $G$ en fonction du nombre d'indépendence $\alpha(G)$ du graphe.

(2) En déduire que $m \leq n\alpha(G)/2$.

**Indication :** Que sait-on sur les voisins d'un sommet donné ?

**Note pour les étudiants 2012-2013 :** Le nombre d'indépendence d'un graphe est une notion qui n'a pas été couverte en classe cette année. Vous pouvez cependant résoudre l'exercice avec les définitions suivantes :

– Soit $G = (V, E)$. Un sous-ensemble $V' \subseteq V$ de sommets est *un ensemble indépendent* s'il n'existe aucune arête entre des éléments de $V'$, c'est-à-dire que pour tous $u, v \in V'$, $(u, v) \notin E$.

– Le *nombre d'indépendence* de $G$, noté $\alpha(G)$, est la taille du plus grand ensemble indépendent de sommets de $G$.

**Solution :**

1. Pour tout sommet $v$, ses voisins doivent former un ensemble indépendent puisque $G$ ne contient pas de triangles. Donc le degré maximal $\Delta(G)$ du graphe est tel que $\Delta(G) \leq \alpha(G)$.

2. $$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \frac{1}{2} n\Delta(G) \leq \frac{1}{2} n\alpha(G).$$

***Problème 5 [20 points].*** Soit $\mathcal{P}$ un poset fini à $n > 0$ éléments.

(1) Montrer que les éléments de $\mathcal{P}$ peuvent être nommés $p_1, \ldots, p_n$ de telle sorte que $p_i \leq p_j$ implique $i \leq j$.

(2) Soit $Z \in \{0,1\}^n$ la matrice définie par $Z_{ij} = 1$ si et seulement si $p_i \leq p_j$. Avec les éléments $p_1, \ldots, p_n$ de $\mathcal{P}$ satisfaisant la propriété de la question (1), montrer que $Z$ est une matrice triangulaire supérieure, et que les coefficients de la diagonale de $Z$ sont tous 1.

(3) Une matrices $B \in \mathbb{Z}^n$ est dite *compatible* avec $\mathcal{P}$ si $B_{ij} = 0$ lorsque $Z_{ij} = 0$. Montrer que si $B$ et $B'$ sont compatibles avec $\mathcal{P}$, alors $B \pm B'$ et $B \cdot B'$ le sont aussi.

(4) (**Bonus** jusqu'à 15 points) Montrer que si $B$ est compatible avec $\mathcal{P}$ et inversible, alors $B^{-1}$ est également compatible avec $\mathcal{P}$.

**Indication :** Raisonner par récurrence dans la partie (1). Pour la partie (4), utiliser le polynôme caractéristique de $B$ pour montrer que $B^{-1} = \varphi(B)$ où $\varphi$ est un polynôme à coefficients entiers, puis utiliser la partie (3).

**Solution :** (1) (10 points) Si $\mathcal{P}$ a un seul élément, l'assertion est claire. On suppose que $\mathcal{P}$ a $n > 1$ éléments. Soit $q$ un élément minimal de $\mathcal{P}$ et on définit $p_1 := q$. Soit $\mathcal{P}' := P \setminus \{q\}$. Par l'hypothèse de récurrence, les éléments de $\mathcal{P}'$ peuvent être nommés $p_2, p_3, \ldots, p_n$ de telle sorte que $p_i \leq p_j$ implique $i \leq j$. On suppose maintenant que $p_1 \leq p_s$ pour un certain $s$. Alors on a tout de suite $1 \leq s$. De plus, on ne peut pas avoir $p_t \leq p_1$ pour $t > 1$, puisque $p_1$ est un élément minimal de $\mathcal{P}$. Le résultat en découle.
(2) (2 points) Si $Z_{ij} = 1$, alors $p_i \leq p_j$, ce qui implique que $i \leq j$. Donc si $i > j$, on a $Z_{ij} = 0$, ce qui montre que $Z$ is triangulaire supérieure. De plus, les entrées diagonales $Z_{ii}$ sont toutes égales à 1 puisque $p_i \leq p_i$.
(3) (8 points) L'assertion est claire pour $B \pm B'$. Soit $C = B \cdot B'$. Alors $C_{ij} = \sum_k B_{ik} B'_{kj}$. Supposons que $p_i \not\leq p_j$. Alors pour tout $k$, si $p_i \leq p_k$, alors $p_k \not\leq p_j$ par transitivité de la relation $\leq$ sur $\mathcal{P}$. D'où $C_{ij} = 0$, ce qui montre que $C$ est compatible avec $\mathcal{P}$.
(4) (15 points) Soit $f(x)$ le polynôme caractéristique de $B$. Puisque $B$ est inversible, on a $f(x) = x\varphi(x) + c$, où $c$ est un entier non nul, et $\varphi$ est un polynôme à coefficients entiers. On a $f(B) = 0$, d'où $B\varphi(B) = -c$, c'est-à-dire que $\varphi(B) = -c \cdot B^{-1}$, d'où $B^{-1} = -\varphi(B)/c$. Par le résultat de la question (3) on sait que $\varphi(B)$ est compatible $\mathcal{P}$. Il s'ensuit que $B^{-1}$ est compatible avec $\mathcal{P}$.

***Problème 6 [15 points].*** Soit $\mathcal{P}$ un poset fini et $f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $x, y \in \mathcal{P}$ on définit

$$g(x,y) := \sum_{\substack{z \\ x,y \leq z}} f(z).$$

Soit $G$ la matrices dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de $\mathcal{P}$ et telle que le coefficient $(x, y)$ de la matrices est égal à $g(x, y)$. Montrer que $\det G = \prod_{x\in\mathcal{P}} f(x)$.

**Indication :** Montrer que $G = Z \cdot F \cdot Z^{\top}$, où la matrice $Z$ est définie dans l'exercice 5 et $F$ est une matrice diagonale qu'on choisira judicieusement.

**Solution :** Soit $F$ la matrice diagonale telle que $F_{x,x} := f(x)$. Soit $T := Z \cdot F \cdot Z^{\top}$. On a $(F \cdot Z^{\top})_{x,y} = \sum_{z\in\mathcal{P}} F_{x,z} Z_{y,z} = f(x) Z_{y,x}$.
Cette dernière expression est nulle si $y \not\leq x$ et égale à $f(x)$ si $y \leq x$. De plus,

$$T_{x,y} = \sum_{z\in\mathcal{P}} Z_{x,z} (F \cdot Z^{\top})_{z,y} = \sum_{y\leq z} Z_{x,z} f(z) = \sum_{x,y\leq z} f(z) = g(x,y).$$

D'où $G = Z \cdot F \cdot Z^{\top}$.
On note que $\det Z = 1$ puisque $Z$ est triangulaire supérieure avec les coefficients sur la diagonale égaux à 1. On en déduit que $\det G = \det F = \prod_{x\in\mathcal{P}} f(x)$.