Exercice 1.1. On rappelle que la *différence symmétrique* de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble X est définie comme

$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Montrer que :

(a) $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(b) Si C est un sous-ensemble de X, alors $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$, c'est-à-dire que l'opération est associative, et on peut donc sans équivoque ne pas écrire les parenthèses.

(c) Soient $F_1, \dots, F_n$, $n \geq 2$ sous-ensembles de X et soit $F = F_1 \,\Delta\, F_2 \,\Delta \dots \Delta\, F_n$. Démontrer que

$$x \in F \iff |\{i \in \mathbb{N} \mid x \in F_i\}| \text{ est impair.}$$

Solution 1.1.

(a) Comme $A \setminus B = A \cap B^c$, on peut utiliser la loi de distributivité et le fait que $A \cup A^c = B \cup B^c = X$ pour voir que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

De plus, en utilisant la loi de De Morgan, on voit que $(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$, ce qui implique que

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(b) Par définition, $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cap C^c) \cup ((A\Delta B)^c \cap C)$. Or

$$(A\Delta B) \cap C^c = [(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \cap C^c = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c),$$

et

$$(A\Delta B)^c \cap C = [(A \cup B)^c \cup (A \cap B)] \cap C = [(A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)] \cap C = (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C),$$

d'où

$$(A\Delta B)\Delta C = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

En regroupant les termes et factorisant par A et A^c respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= [A \cap ((B^c \cap C^c) \cup (B \cap C))] \cup [A^c \cap ((B \cap C^c) \cup (B^c \cap C))]\\ &= [A \cap (B\Delta C)^c] \cup [A^c \cap (B\Delta C)]\\ &= A\Delta(B\Delta C).\end{aligned}$$

(c) On démontre le résultat par récurrence sur $n \geq 2$.
Pas de base : si $n = 2$ on a

$$\begin{aligned}x \in F_1\Delta F_2 &\Leftrightarrow x \in (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)\\ &\Leftrightarrow (x \in F_1 \text{ et } x \notin F_2) \text{ ou } (x \in F_2 \text{ et } x \notin F_1)\\ &\Leftrightarrow |\{i \mid x \in F_i\}| = 1.\end{aligned}$$

Etape de récurrence :

$$\begin{aligned}x \in F_1\Delta \cdots \Delta F_n \Delta F_{n+1} &\Leftrightarrow (x \in F_1\Delta \cdots \Delta F_n \text{ et } x \notin F_{n+1}) \text{ ou } (x \notin F_1\Delta \cdots \Delta F_n \text{ et } x \in F_{n+1})\\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (|\{i \mid x \in F_i,\ i = 1, \dots, n\}| \text{ est impair et } x \notin F_{n+1})\\ &\qquad \text{ou } (|\{i \mid x \in F_i,\ i = 1, \dots, n\}| \text{ est pair et } x \in F_{n+1})\\ &\Leftrightarrow |\{i \mid x \in F_i,\ i = 1, \dots, n+1\}| \text{ est impair,}\end{aligned}$$

où (1) est vraie par l'hypothèse de récurrence.

Exercice 1.2. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble X. Si elles sont vraies, démontrer les relations suivantes et trouver un contre-exemple dans les cas contraires :

(a) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

(b) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

Solution 1.2.

(a) Faux. On a seulement $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. En effet,

$$\begin{aligned} P(A) \cup P(B) &= \{E \subseteq X \mid E \in P(A) \text{ ou } E \in P(B)\} \\ &= \{E \subseteq X \mid E \subseteq A \text{ ou } E \subseteq B\} \\ &\subseteq \{E \subseteq X \mid E \subseteq A \cup B\} \\ &= \{E \subseteq X \mid E \in P(A \cup B)\} \\ &= P(A \cup B). \end{aligned}$$

Pour voir que ces deux ensembles ne sont pas nécessairement égaux, on considère A et B non vides et tels que $A \backslash B \neq \emptyset$ et $B \backslash A \neq \emptyset$. Alors $A \cup B \in P(A \cup B)$, mais $A \cup B \notin P(A) \cup P(B)$ car $A \cup B \notin P(A)$ et $A \cup B \notin P(B)$.

(b) Vrai :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \{E \subseteq X \mid E \in P(A \cap B)\} \\ &= \{E \subseteq X \mid E \subseteq A \cap B\} \\ &= \{E \subseteq X \mid E \subseteq A \text{ et } E \subseteq B\} \\ &= \{E \subseteq X \mid E \in P(A) \text{ et } E \in P(B)\} \\ &= P(A) \cap P(B). \end{aligned}$$

Exercice 1.3. Soit $f : A \longrightarrow B$ une application. Montrer que f est une bijection (i.e., injective et surjective) si et seulement si il existe une application $g : B \longrightarrow A$ avec $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

Solution 1.3. Soit $f : A \longrightarrow B$ une application bijective. On construit $g : B \longrightarrow A$ de la manière suivante. Comme f est surjective, $\forall b \in B, \exists a \in A$ t.q. $f(a) = b$. Comme f est injective, si $a' \in A$ avec $f(a') = b = f(a)$, alors $a = a'$, et donc pour chaque $b \in B$, il existe un unique $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On définit $g(b) := a$, et ceci définit une application de B dans A. Par construction, $g(f(a)) = a$ et $f(g(b)) = b$, i.e.

$$f \circ g = Id_B \text{ et } g \circ f = Id_A. \quad (1)$$

Supposons maintenant qu'il existe g qui satisfait (1). Alors

$$f(a) = f(a') \Rightarrow g(f(a)) = g(f(a')) \Rightarrow a = a'$$

et donc f est injective. Comme $f(g(b)) = b$, f est surjective, car $g(b)$ est un élément de la fibre de b par f. Ainsi, f est injective et surjective.

Exercice 1.4. Soient A, B, C, A', B' et C' des sous-ensembles non-vides d'un ensemble fini X qui vérifient $A \times B \leftrightarrow A' \times B'$ et $B \times C \leftrightarrow B' \times C'$. Démontrer les relations suivantes si elles sont vraies, trouver un contre-exemple dans le cas contraire :

(a) $A \times C \leftrightarrow A' \times C'$

(b) $A \times C' \leftrightarrow A' \times C$

Solution 1.4.

(a) Les ensembles $A \times C$ et $A' \times C'$ ne sont pas forcément bijectifs : prenons des ensembles finis avec les cardinalités suivantes :

$$|A| = 2, |B| = 15, \ |C| = 1$$
$$|A'| = 6, |B'| = 5, \ |C'| = 3.$$

Alors

$$|A \times B| = 30 = |A' \times B'|$$
$$|B \times C| = 15 = |B' \times C'|,$$

et donc $A \times B \leftrightarrow A' \times B'$ et $B \times C \leftrightarrow B' \times C'$.
Cependant, $|A \times C| = 2 \neq 18 = |A' \times C'|$, et donc $A \times C$ et $A' \times C'$ ne sont pas bijectifs.

(b) Comme les ensembles ne sont pas vides, on a

$$|A| \cdot |B| = |A'| \cdot |B'| \neq 0$$
$$|B| \cdot |C| = |B'| \cdot |C'| \neq 0,$$

ce qui implique que

$$\frac{|A|}{|C|} = \frac{|A'|}{|C'|}$$

et donc que $|A| \cdot |C'| = |A'| \cdot |C|$, c'est-à-dire que $|A \times C'| = |A' \times C|$, et donc on peut construire une bijection entre $A \times C'$ et $A' \times C$.

Exercice 1.5. Soient A, B et C trois sous-ensembles non vides d'un ensemble X. Démontrer les relations suivantes :

(a) $A^{B \times C} \leftrightarrow \left(A^B\right)^C$

(b) $(A \times B)^C \leftrightarrow A^C \times B^C$

(Remarquer que l'ensemble X n'est pas nécessairement fini.)

Solution 1.5.

(a) On établit une bijection entre $A^{B \times C}$ et $\left(A^B\right)^C$.
On définit

$$\varphi : A^{B \times C} \to \left(A^B\right)^C$$
$$f \mapsto \varphi(f)$$

avec $\varphi(f)(c)(b) := f(b, c)$, ainsi que

$$\psi : \left(A^B\right)^C \to A^{B \times C}$$
$$g \mapsto \psi(g)$$

avec $\psi(g)(b, c) = g(c)(b)$. Alors

$$\psi(\varphi(f))(b, c) = \varphi(f)(c)(b) = f(b, c)$$

et

$$\varphi(\psi(g))(c)(b) = \psi(g)(b, c) = g(c)(b),$$

et donc

$$\psi \circ \varphi = Id_{A^{B \times C}} \text{ et } \varphi \circ \psi = Id_{(A^B)^C}.$$

(b) Soit $f \in (A \times B)^C$. Pour tout $c \in C$, on définit $f_1(c)$ et $f_2(c)$ par l'équation $f(c) = (f_1(c), f_2(c))$. Les fonctions f_1 et f_2 sont des applications car f en est une, ainsi $f_1 \in A^C$ et $f_2 \in B^C$. Soit alors

$$\begin{aligned} \varphi : (A \times B)^C &\to A^C \times B^C \\ f &\mapsto \varphi(f) := (f_1, f_2)\,. \end{aligned}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} \psi : A^C \times B^C &\to (A \times B)^C \\ (g_1, g_2) &\mapsto \psi(g_1, g_2) \end{aligned}$$

avec $\psi(g_1, g_2)(c) := (g_1(c), g_2(c))$.
Alors

$$\psi(\varphi(f)) = \psi(f_1, f_2) = f,$$

et

$$\varphi(\psi(g_1, g_2)) = ([\psi(g_1, g_2)]_1, [\psi(g_1, g_2)]_2) = (g_1, g_2).$$

Ainsi

$$\psi \circ \varphi = Id_{(A\times B)^C} \text{ et } \varphi \circ \psi = Id_{A^C \times B^C}.$$

Exercice 1.6.

Soit $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble X. On définit les deux sous-ensembles de X suivants :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} X_n &:= \bigcup_{m=0}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} X_n \right) \\ \limsup_{n\to\infty} X_n &:= \bigcap_{m=0}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} X_n \right) \end{aligned}$$

(a) Montrer que
i) $\liminf\limits_{n\to\infty} X_n = \{x \in X \mid x \in X_i$ toujours sauf pour un nombre fini de $i\}$,
ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} X_n = \{x \in X \mid x \in X_i$ pour un infinité de $i\}$.

(b) Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

(c) Calculer les $\liminf$ et $\limsup$ dans les cas suivants (on pourra utiliser (a) et le résultat de l'exercice 1.1(c) si besoin) :
i) $X_k = \{(-1)^k\}$, $k \in \mathbb{N}$.
ii) $X_0 = \mathbb{N}$ et pour $k > 0$, $X_k = X_{k-1} \,\Delta\, \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}$.
iii) $X_0 = \emptyset$ et pour $k > 0$, $X_k = X_{k-1} \,\Delta\, k\mathbb{Z}$,
où $k\mathbb{Z}$ dénote l'ensemble de tous les multiples entiers de k, c'est-à-dire que

$$k\mathbb{Z} = \{n \cdot k \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour *iii)*, on rappelle que si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier n est donnée par $n = \prod_{i=1}^t p_i^{e_i}$, alors le nombre de diviseurs de n est $\prod_{i=1}^t (e_i + 1)$.

Solution 1.6.

(a) *i)* Soit $x \in X$. On a

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} X_n &\iff \exists m_0 \text{ t.q. } x \in \bigcap_{n \geq m_0} X_n \\ &\iff \exists m_0 \text{ t.q. } \forall n \geq m_0,\ x \in X_n \\ &\iff x \in \{x \in X \mid x \in X_i \text{ toujours sauf pour un nombre fini de } i\}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} X_n &\iff \forall m,\ x \in \bigcup_{n \geq m} X_n \\ &\iff \forall m,\ \exists n \geq m \text{ t.q. } x \in X_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Si $x \in X_i$ pour une infinité de i, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe i t.q. $i \geq m$ et $x \in X_i$, et donc (2) est vérifié. Si $x \in X_i$ pour un nombre fini de i, en prenant m comme le maximum de ces i, on a $x \notin X_n \forall n > m$, et (2) n'est pas vérifié. Ainsi

$$(2) \iff x \in \{x \in X \mid x \in X_i \text{ pour un infinité de } i\}.$$

(b) Dans $\mathbb{N}$, le complémentaire d'un ensemble fini est un ensemble infini, et donc

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} X_n &= \{x \in X \mid x \in X_i \text{ toujours sauf pour un nombre fini de } i\} \\ &\subseteq \{x \in X \mid x \in X_i \text{ pour un infinité de } i\} \\ &= \limsup_{n\to\infty} X_n. \end{aligned}$$

c) *i)* On a

$$X_n = \begin{cases} \{1\} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \{-1\} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc $X_n \cap X_{n+1} = \emptyset$ et $X_n \cup X_{n+1} = \{-1, 1\}$, c'est-à-dire

$$\forall m, \quad \bigcap_{n \geq m} X_n = \emptyset \text{ et } \bigcup_{n \geq m} X_n = \{-1, 1\}.$$

Ainsi,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \emptyset \subset \{-1, 1\} = \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

ii) On dénote l'ensemble $\{n \in N \mid n \geq k\}$ par $\mathbb{N}_{\geq k}$. Si $X_0 = \mathbb{N}$ et $X_k = X_{k-1} \Delta \mathbb{N}_{\geq k}$, on a

$$X_k = \mathbb{N} \,\Delta\, \mathbb{N}_{\geq 1} \,\Delta\, \mathbb{N}_{\geq 2} \,\Delta\, \cdots \,\Delta\, \mathbb{N}_{\geq k}.$$

En utilisant l'exercice 1.1(c), on a

$$x \in X_k \iff x \in \mathbb{N}_i,\ i = 0, \ldots, k \ \text{ un nombre impair de fois.}$$

Donc, pour un x fixé, si $k \geq x$, on a $x \in X_k$ si et seulement si x est pair (en effet, x appartient à $x + 1$ ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{N}_{\geq 1}, \ldots, \mathbb{N}_{\geq x}$). Ainsi si x est pair, $x \in X_k$ pour tous X_k, sauf pour un nombre fini de X_k (les cas où $k < x$). Si x est impair, dès que $k > x$, $x \notin X_k$. Donc

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k\} = 2\mathbb{N}.$$

iii) Si $X_0 = \emptyset$ et $X_k = X_{k-1} \,\Delta\, k\mathbb{Z}$, on a

$$X_k = \emptyset \,\Delta\, \mathbb{Z} \,\Delta\, 2\mathbb{Z} \,\Delta\, \cdots \,\Delta\, k\mathbb{Z}.$$

En utilisant encore l'exercice 1.1(c), on a

$$\begin{aligned} x \in X_k &\iff x \in i\mathbb{Z},\ i = 1, \dots, k \text{ un nombre impair de fois} \\ &\iff i \mid x,\ i = 1, \dots, k \text{ un nombre impair de fois.} \end{aligned}$$

Si $k \geq x$, la cardinalité de l'ensemble $\{i \leq k \mid i \mid x\}$ est égale au nombre de diviseurs de x. Or si $x = \pm \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ avec p_i premier et $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, alors le nombre de diviseurs de x est $\prod_{i=1}^{t}(e_i + 1)$. Donc si $k \geq x$, $x \in X_k$ si et seulement si $\prod_{i=1}^{t}(e_i + 1)$ est impair. Or

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{t}(e_i + 1) \text{ est impair} &\iff \forall i,\ e_i + 1 \text{ est impair} \\ &\iff \forall i,\ e_i \text{ est pair} \\ &\iff |x| \text{ est un carré.} \end{aligned}$$

Ainsi, à l'exception d'un nombre fini de fois (les cas où $k < x$), $x \in X_k$ si est seulement si $|x|$ est un carré. Donc

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n = \{i \in \mathbb{N} \mid |i| \text{ est un carré.}\}$$