Exercice 3.1.

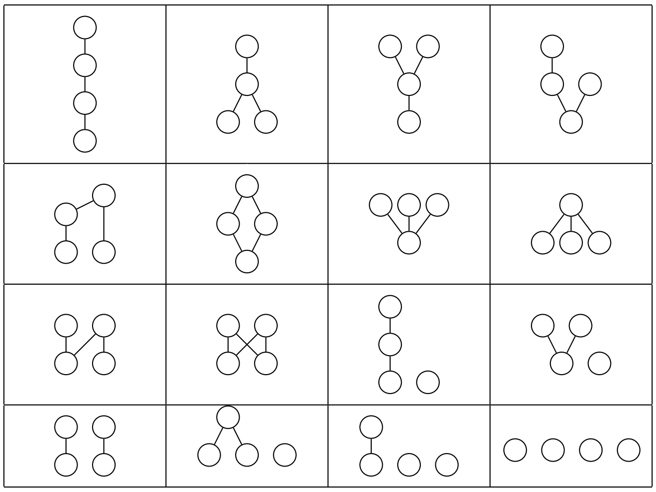
1. Trouver les 16 types possibles de posets à 4 éléments.
2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit $\leq_2$, i.e.,

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \leq_2 (x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'.$$

Soit C_1 le disque ouvert de rayon 1 centré sur l'origine, $C_2 = [-1,0] \times [-1,0]$ et $C = C_1 \cup C_2$. Etudier l'existence pour C de minorants, majorants, borne inférieure, borne supérieure, plus petit élément, plus grand élément.

Solution 3.1.

1. Voici la liste des diagrammes de Hasse correspondants :



2. *i)* Tout minorant $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de C doit satisfaire $\forall (x',y') \in C$, $x \leq x'$ et $y \leq y'$. (x,y) doit donc satisfaire $x \leq -1, y \leq -1$. L'ensemble des minorants de C est donc

$$M_{min} =]-\infty, -1]^2.$$

ii) De même, l'ensemble des majorants de C est

$$M_{maj} = [1, \infty[^2.$$

iii) La borne inférieure ou plus grand minorant (x_i, y_i) de C satisfait $(x_i, y_i) \in M_{min}$ et pour tout $(x,y) \in M_{min}, (x,y) \leq_2 (x_i, y_i)$, c'est-à-dire que pour tout $(x,y) \in M_{min}$, on a $x \leq x_i$ et $y \leq y_i$. On aura donc $(x_i, y_i) = (-1,-1)$.

iv) De même, la borne supérieure (x_s, y_s) de C satisfait $(x_s, y_s) \in M_{maj}$ et pour tout $(x,y) \in M_{maj}, (x_s, y_s) \leq_2 (x,y)$. On aura donc $(x_s, y_s) = (1,1)$.

v) Par définition, le plus petit élément (x_{min}, y_{min}) de C, s'il existe, satisfait à la fois $(x_0, y_0) \in C$ et $(x_0, y_0) \in M_{min}$. Or $C \cap M_{min} = \{(-1,-1)\}$; le plus petit élément de C est donc $(-1,-1)$.

vi) C n'admet pas de plus grand élément : en effet pour tout $(x_1, x_2) \in C$, il existe $(y_1, y_2) \in C$ avec $x_1 \leq y_1$ ou $x_2 \leq y_2$.

Exercice 3.2. Démontrer les assertions suivantes :

1. Soit $(E, \leq)$ un poset et $F \subseteq E$. Alors $(F, \leq)$ est un poset, appelé *sous-poset de E*.

2. Soit $(E, \leq)$ un poset. Alors $(E, \leq)$ est isomorphe à un sous-poset de $(P(E), \subseteq)$.
3. Soient $\leq_1$ et $\leq_2$ deux relations d'ordre sur P. Soit $\leq_{12} = \leq_1 \cap \leq_2$ la relation sur P définie par $a \leq_{12} b$ si et seulement si $a \leq_1 b$ et $a \leq_2 b$. Alors $\leq_{12}$ est une relation d'ordre. De manière générale, si $\leq_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont des relations d'ordre sur P, on définit $\ll = \bigcap_{i=1}^{n} \leq_i$ sur P par $x \ll y \iff \forall i, x \leq_i y$.

Solution 3.2.

1. Soit R la relation d'ordre correspondant au poset $(E, \leq)$, c'est-à-dire que
$$R = \{(a, b) \mid a, b \in E, a \leq b\}.$$
Il s'agit d'abord de bien définir $(F, \leq)$. Soit R_F la relation R restreinte au sous-ensemble F de E, c'est-à-dire que
$$R_F = \{(a, b) \mid a, b \in F, (a, b) \in R\}.$$
On note que $R_F \subseteq R$. $(F, \leq) = (F, R_F)$ correspond donc au sous-ensemble F de E muni de la relation R_F. Pour démontrer que $(F, \leq)$ est un poset, il faut montrer que R_F est bien un ordre partiel sur F. Or
   - Pour tout $a \in F$, on a $a \in E$, et par réflexivité de R, on a bien $(a, a) \in R$ et donc $(a, a) \in R_F$.
   - Pour tous $a, b \in F$ tels que $(a, b) \in R_F$ et $(b, a) \in R_F$, on aura $a, b \in E$ et $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ par définition de R_F. Par antisymmétrie de R, on a donc bien $a = b$.
   - Pour tous $a, b, c \in F$ tels que $(a, b), (b, c) \in R_F$, on aura $(a, b), (b, c) \in R$ et donc $(a, c) \in R$ par transitivité de R. Ceci joint au fait que $a, c \in F$ implique que $(a, c) \in R_F$ et donc R_F est bien transitive.
2. Soit $(E, \leq)$ un poset. On définit l'injection suivante de E dans $P(E)$:
$$\begin{aligned} \varphi : E &\to P(E) \\ x &\mapsto E_x = \{z \in E \mid z \leq x\}. \end{aligned}$$
L'application φ est bien une injection car si $E_x = E_y$ alors $x, y \in E_x = E_y$ et donc $x \leq y$ et $y \leq x$, qui implique que $x = y$. Soit $F = Im(\varphi) \subseteq P(E)$, les ensembles E et F sont en bijection. $(F, \subseteq)$ est bien un poset (voir question 1). Pour vérifier que les posets $(E, \leq)$ et $(F, \subseteq)$ sont isomorphes, il suffit de vérifier que
$$\forall x, y \in E,\ x \leq y \Leftrightarrow E_x \subseteq E_y.$$
Soient donc $x, y \in E$ tels que $x \leq y$. Pour tout $z \in E_x$, on a $z \leq x$ par définition de E_x. Or $x \leq y$, donc par transitivité $z \leq y$ et donc $z \in E_y$. D'où $E_x \subseteq E_y$.
Soient maintenant $x, y \in E$ tels que $x \not\leq y$. Il existe alors un élément $z \in E_x$ tel que $z \notin E_y$: il suffit de prendre $z = x$. On a donc $E_x \not\subseteq E_y$.
3.
   - Par réflexivité de $\leq_1$ et $\leq_2$, on a pour tout $x \in P$ que $x \leq_1 x$ et $x \leq_2 x$, et donc $x \leq_{12} x$. $\leq_{12}$ est donc réflexive.
   - Pour tous $x, y \in P$, si $x \leq_{12} y$ et $y \leq_{12} x$ alors $x \leq_1 y$, $x \leq_2 y$, $y \leq_1 x$ et $y \leq_2 x$, donc en particulier par antisymmétrie de $\leq_1$, on aura $x = y$. $\leq_{12}$ est donc antisymmétrique.
   - Pour tous $x, y, z \in P$, si $x \leq_{12} y$ et $y \leq_{12} z$, on aura $x \leq_1 y$, $x \leq_2 y$, $y \leq_1 z$ et $y \leq_2 z$. Par transitivité de $\leq_1$, on a donc bien $x \leq_1 z$, et par transitivité de $\leq_2$, on a $x \leq_2 z$, d'où $x \leq_{12} z$. $\leq_{12}$ est donc transitive.

   Etant réflexive, antisymmétrique et transitive, $\leq_{12}$ est donc bien une relation d'ordre.

Exercice 3.3. Soit $(P, \leq)$ un poset fini. On rappelle qu'une relation d'ordre $\leq_1$ *étend* la relation $\leq$ si $\forall x, y \in P$, $x \leq y \Rightarrow x \leq_1 y$. La relation d'ordre $\leq_1$ est une *extension linéaire* de $\leq$ si $\leq_1$ étend $\leq$ et $\leq_1$ est un ordre total sur P.

1. Soit $a, b \in P$ avec $a||b$. Montrer qu'il existe une extension linéaire $\leq_1$ de $\leq$ qui vérifie $b \leq_1 a$. (Indication : soit $A = \{x|a \leq x\}$. Ordonner linéairement A et $P \setminus A$ en respectant $\leq$, puis fusionner ces deux ordres totaux. Où se trouve b ?).
2. Soient $\leq_1, \ldots, \leq_n$ des relations d'ordre total sur P et $\ll = \bigcap_{i=1}^n \leq_i$ (c.f. Exercice 3.2 pour la définition). Montrer que deux éléments a et b sont incomparables pour $\ll$ si et seulement si il existe $\leq_i$ et $\leq_j$ avec $a <_i b$ (dans le sens où $a \leq_i b$ et $a \neq b$) et $b <_j a$.
3. Soit L l'ensemble des extensions linéaires de $\leq$. Montrer que $\leq = \bigcap_{\leq_i \in L} \leq_i$.
4. On appelle *dimension linéaire* de $(P, \leq)$ le nombre minimal n d'extensions linéaires $\leq_i$, $i = 1, \ldots n$ de $\leq$ telles que $\leq = \bigcap_{i=1}^n \leq_i$. Trouver les dimensions linéaires des posets suivants :
   (a) $(\{a_0, \ldots, a_n\}), \leq)$ avec $a_i||a_j$ si $i \neq j$.
   (b) $(\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$.
   (c) $(\mathrm{Div}(6), |)$.

Solution 3.3.

1. Soit $\leq_A$ une extension linéaire de $(A, \leq)$:
$$a \leq_A x_1 \leq_A \cdots \leq_A x_t,$$
avec $A = \{a, x_1, \ldots, x_t\}$, et soit $\leq_{P \setminus A}$ une extension linéaire de $(P \setminus A, \leq)$:
$$y_1 \leq_{P \setminus A} \cdots \leq_{P \setminus A} y_s,$$
avec $P \setminus A = \{y_1, \ldots, y_s\}$. On considère l'ordre linéaire $\leq_1$ sur P donné par
$$y_1 \leq_{P \setminus A} \cdots \leq_{P \setminus A} y_s \leq_1 a \leq_A x_1 \leq_A \ldots \leq_A x_t.$$
Alors $\leq_1$ étend $\leq$: en effet, soit $\beta \leq \alpha$ dans P. Si $\alpha, \beta \in A$, alors par construction de $\leq_A$, $\beta \leq_A \alpha$. Si $\alpha, \beta \in P \setminus A$, alors par construction de $\leq_{P \setminus A}$, $\beta \leq_{P \setminus A} \alpha$. Sinon, $\alpha \in P \setminus A$ et $\beta \in A$ n'est pas possible : en effet
$$\beta \in A \Rightarrow a \leq \beta \Rightarrow a \leq \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha \in A$$
ce qui est une contradiction. Ainsi $\alpha \in A$ et $\beta \in P \setminus A$ et donc $\beta \leq_1 \alpha$. Dès lors, comme $b||a$, $b \notin A$, et donc $b \in P \setminus A$ et ainsi $b \leq_1 a$.
2. $$\begin{aligned} a||b &\iff a \not\ll b \text{ et } b \not\ll a \\ &\iff (\exists j \text{ t.q. } a \not\leq_j b) \text{ et } (\exists i \text{ t.q. } b \not\leq_i a) \\ &\iff (\exists j \text{ t.q. } b <_j a) \text{ et } (\exists i \text{ t.q. } a <_i b), \end{aligned}$$
où la dernière équivalence suit du fait que les ordres $\leq_1$ et $\leq_2$ sont totaux.
3. Il s'agit de démontrer que pour tous $a, b \in P$, $a \leq b$ si et seulement si $a \leq_i b \,\forall \leq_i \in L$.

   Or si a et b sont comparables pour $\leq$, disons $a \leq b$, alors $a \leq_i b \,\forall \leq_i \in L$ par définition d'une extension linéaire. Conversement, si a et b ne sont pas comparables, alors par la question 2, il existe des extensions linéaires $\leq_1, \leq_2 \in L$ telles que $a \leq_1 b$ et $b \leq_2 a$. Ainsi on a bien
$$a \leq b \iff \forall \leq_i \in L, a \leq_i b.$$
4. (a) Soit $P_1 = \{a_0, \ldots, a_n\}$. On prouve d'abord que $\dim(P_1, \leq) \leq 2$ en donnant deux extensions linéaires $\leq_1$ et $\leq_2$ de $\leq$ telles que $\leq := \leq_1 \cap \leq_2$. On définit donc
   $\leq_1$: $a_0 \leq_1 a_1 \leq_1 \ldots \leq_1 a_n$, i.e., $a_i \leq_1 a_j \Leftrightarrow i \leqslant j$,

$\leq_2$: $a_n \leq_2 a_{n-1} \leq_2 \ldots \leq_2 a_0$, i.e., $a_i \leq_2 a_j \Leftrightarrow i \geqslant j$.
Soit $a_i \neq a_j$, et soit $\ll := \leq_1 \cap \leq_2$. Alors si $i < j$, comme $a_i \ll a_j \Longrightarrow a_i \leq_2 a_j$, on a $i \geqslant j$, ce qui est impossible. Si $i > j$, comme $a_i \ll a_j \Longrightarrow a_i \leq_1 a_j$, on a $i \leqslant j$, ce qui est aussi impossible. Deux éléments différents ne sont jamais comparables pour $\ll$ et donc $\ll = \leq$. Ainsi $\dim(P_1, \leq) \leq 2$. De plus, on a $\dim(P_1, \leq) \neq 1$ puisque $\leq$ n'est pas un ordre total. Ainsi, $\dim(P_1, \leq) = 2$.

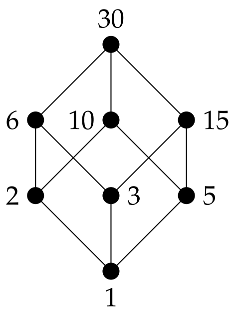
(b) Soit $P_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$. On définit les deux extensions linéaires suivantes de $\subseteq$:
$\leq_1$: $\emptyset \leq_1 \{1\} \leq_1 \{1,2\} \leq_1 \{3\} \leq_1 \{1,2,3\}$
$\leq_2$: $\emptyset \leq_2 \{3\} \leq_2 \{1\} \leq_2 \{1,2\} \leq_2 \{1,2,3\}$.
On vérifie que $\subseteq$ est contenu dans $\leq_1 \cap \leq_2$, d'où $\dim(P_2, \subseteq) \leq 2$. Par ailleurs, $\{1\}||\{3\}$ pour $\subseteq$, et donc $\dim(P_2, \subseteq) > 1$. Finalement $\dim(P_2, \subseteq) = 2$.

(c) On définit les deux extensions linéaires suivantes de $|$:
$\leq_1$: $1 \leq_1 2 \leq_1 3 \leq_1 6$
$\leq_2$: $1 \leq_2 3 \leq_2 2 \leq_2 6$.
On raisonne comme dans la question (b) ci-dessus pour obtenir $\dim(\text{Div}(6), |) = 2$.

Exercice 3.4. On cherche à démontrer que la dimension linéaire de $(\text{Div}(30), |)$ est 3.

1. Trouver trois ordres linéaires $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ sur Div(30) avec $| \; = \; \leq_1 \cap \leq_2 \cap \leq_3$ (on pourra s'inspirer du diagramme de Hasse de $(\text{Div}(30), |)$).
2. On suppose par l'absurde que $| \; = \; \leq_1 \cap \leq_2$ avec $\leq_1, \leq_2$ des ordres linéaires. Soient a, b, c tels que $\{a, b, c\} = \{2, 3, 5\}$. Montrer que
$$a \leq_1 b \leq_1 c \Longrightarrow c \leq_2 b \leq_2 a.$$
3. Montrer alors que $b|ac$ et conclure.

Solution 3.4.



1. Dans le diagramme de Hasse du poset $(Div(30), |)$ ci-dessus, on définit les trois "axes" donnés par les arêtes $(1,2)$, $(1,3)$ et $(1,5)$. On définit les trois extensions linéaires suivantes de $|$:

$\leq_1$: $1 \leq_1 2 \leq_1 3 \leq_1 6 \leq_1 5 \leq_1 10 \leq_1 15 \leq_1 30$
$\leq_3$: $1 \leq_3 3 \leq_3 5 \leq_3 15 \leq_3 2 \leq_3 6 \leq_3 10 \leq_3 30$
$\leq_2$: $1 \leq_2 5 \leq_2 2 \leq_2 10 \leq_2 3 \leq_2 15 \leq_2 6 \leq_2 30$,

où pour chaque extension linéaire on a ordonné les éléments du poset selon l'un des trois axes.
Soit $E_a = \{x \mid a \leq_i x, i = 1,2,3\}$. On a $E_1 = \text{Div}(30)$, $E_2 = \{2,6,10,30\}$, $E_3 = \{3,6,15,30\}$, $E_5 = \{5,10,15,30\}$, $E_6 = \{6,30\}$, $E_{10} = \{10,30\}$, $E_{15} = \{15,30\}$, et $E_{30} = \{30\}$. On vérifie aisément que pour tout $a \in \text{Div}(30)$, on a bien $E_a = \{x \mid a \leq x\}$, et donc que $| \; = (\leq_1 \cap \leq_2 \cap \leq_3)$.

2. Pour tous $a, b \in \{2, 3, 5\}$, on a $a||b$ pour $|$. Or puisque $| \ = \leq_1 \cap \leq_2$,

$$a \leq_1 b \text{ et } a||b \text{ pour } | \Longrightarrow b \leq_2 a,$$

et de même

$$b \leq_1 c \text{ et } b||c \text{ pour } | \Longrightarrow c \leq_2 b.$$

D'où

$$a \leq_1 b \leq_2 c \Longrightarrow c \leq_2 b \leq_2 a.$$

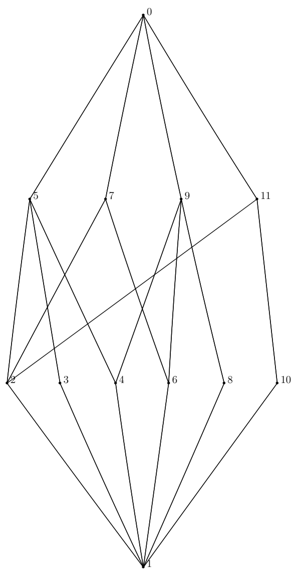
3. Comme $a|ac$ et $c|ac$, on doit avoir $a \leq_1 ac$, $a \leq_2 ac$, $c \leq_1 ac$ et $c \leq_2 ac$. Ainsi,

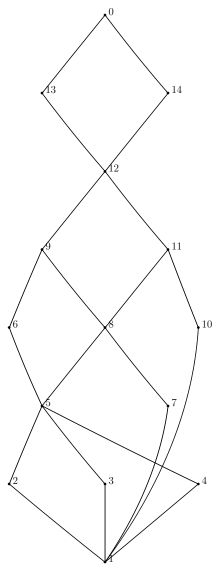
$$a \leq_1 b \leq_1 c \leq_1 ac \text{ et } c \leq_2 b \leq_2 a \leq_2 ac,$$

d'où $b \leq_1 ac$ et $b \leq_2 ac$, ce qui implique que $b|ac$. Mais comme $3 \nmid 10$, $2 \nmid 15$ et $5 \nmid 6$, il est alors impossible d'avoir $| \ = (\leq_1 \cap \leq_2)$, et on a donc $\dim(\text{Div}(30), |) = 3$.

Exercice 3.5. On donne les posets $P1$ et $P2$ par leur diagramme de Hasse ci-dessous.

1. Pour chacun de ces posets, en calculer une extension linéaire.
2. Calculer les valeurs de leur fonction de Moebius bivariée $\mu_1(1, a_1)$ et $\mu_2(1, a_2)$ quand $a_1 \in P_1$ et $a_2 \in P_2$.





Solution 3.5.

1. Pour trouver une extension linéaire, on utilise la méthode du cours, à savoir, on procède par induction en enlevant étape par étape un élément maximal. On obtient les extensions linéaires suivantes pour nos posets :
$P_1 : \ 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 5 \leq 7 \leq 9 \leq 11 \leq 0$
$P_2 : \ 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq 7 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 9 \leq 11 \leq 12 \leq 13 \leq 14 \leq 0.$

2. • Dans P_1 :

$$\mu_1(1,1) = \mu_1(1,7) = \mu_1(1,11) = 1$$
$$\mu_1(1,2) = \mu_1(1,3) = \mu_1(1,4) = \mu_1(1,6) = \mu_1(1,8) = \mu_1(1,10) = \mu_1(1,0) = -1$$
$$\mu_1(1,5) = \mu_1(1,9) = 2.$$

• Dans P_2 :

$$\mu_2(1,1) = \mu_2(1,8) = \mu_2(1,11) = 1$$
$$\mu_2(1,2) = \mu_2(1,3) = \mu_2(1,4) = \mu_2(1,7) = \mu_2(1,10) = -1$$
$$\mu_2(1,5) = 2$$
$$\mu_2(1,6) = \mu_2(1,9) = \mu_2(1,12) = \mu_2(1,13) = \mu_2(1,14) = \mu_2(1,0) = 0.$$