Pour les exercices 5 et 8, on rappelle que l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'énonce ainsi : pour tous vecteurs réels $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$, on a $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2}$.

Exercice 5.1. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de E est pris dans $V \times V$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Solution 5.1. Supposons G non connexe et montrons que son complémentaire l'est en montrant que pour tout $v_1, v_2 \in V$ il existe un chemin dans E^c allant de v_1 à v_2.

- Si v_1 et v_2 ne sont pas dans la même composante connexe, alors en particulier $(v_1, v_2) \notin E$, donc $(v_1, v_2) \in E^c$: ainsi v_1 et v_2 sont même voisins dans le graphe complémentaire $\overline{G}$.
- Si v_1 et v_2 appartiennent à la même composante connexe, comme G n'est pas connexe il existe un sommet v_3 de G qui n'est pas dans la même composante connexe que v_1 et v_2. On en déduit alors en appliquant deux fois le raisonnement précédent que (v_1, v_3) et (v_3, v_2) sont des arêtes de $\overline{G}$ qui forment un chemin de v_1 à v_2.

Exercice 5.2. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Solution 5.2. On montre la contraposée. Si G n'est pas connexe, il existe une composante connexe de taille au plus $\lfloor n/2 \rfloor$. Un sommet de cette composante est donc de degré au plus $\lfloor n/2 \rfloor$-1, c'est-à-dire $< \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, d'où le résultat.

Exercice 5.3. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Solution 5.3. Il suffit de montrer l'équivalence dans le cas où G est connexe. Le cas général s'ensuit facilement, puisque un graphe est biparti ssi ses composantes connexes le sont et que les cycles d'un graphe demeurent dans l'une de ses composantes connexes. Nous supposons donc G connexe. Montrons les deux assertions suivantes

- S'il existe un cycle impair, alors G est non biparti :
  Pour un tel cycle $v_1 - \cdots - v_{2p+1} - v_1$, on peut montrer par récurrence en partant de v_1 que tous les v_i pour i impair sont du même côté dans le graphe biparti, ce qui est une contradiction car v_{2p+1} et v_1 sont voisins.
- S'il n'existe aucun cycle impair, alors $G = (V, E)$ est biparti :
  Prenons un sommet v_0 de G et notons A l'ensemble des sommets à distance paire de v_0, c'est-à-dire que la longueur du plus court chemin entre v_0 et les éléments de A est paire. On pose alors $B = V \setminus A$. Le graphe G est alors biparti pour cette décomposition ss'il n'y a aucune arête entre deux sommets de A ou deux sommets de B. Supposons qu'il existe une arête (a, a') dans A, alors par hypothèse, il existe un chemin de longueur minimale c de longueur paire de v_0 à a et un chemin de longueur minimale c' de longueur paire de a' à v_0. Soit w le sommet commun aux deux chemins c et c' le plus distant de v_0. On peut former le cycle passant par w, a et a' qui emprunte successivement une portion de c, l'arête (a, a') puis une portion de c' pour revenir en w. Ce cycle est de longueur impaire car la distance entre w et a et de même parité que celle entre w et a'. Mais la présence d'un cycle de longueur impaire est exclue, donc il ne peut y avoir d'arête entre a et a'. On exclut de même qu'une arête puisse exister entre deux sommets de B.

Exercice 5.4. Soit $d \geq 3$. Montrer que la taille du plus petit cycle contenu dans un graphe d-régulier sur n sommets ne peut dépasser $c \log_{d-1}(n)$ pour une certaine constante c.

Solution 5.4. Soit v_0 un sommet de G, regardons l'ensemble A de ses voisins à distance inférieure à i. S'ils sont tous différents, on a $|A| = 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{i-1}$. Par contre si $1 + d + \cdots +$

$d(d-1)^{i-1} \geq n$, au moins deux éléments de A sont égaux et il existe par conséquent un cycle de taille au plus $2i$. En effet, il existe alors un sommet w du graphe que l'on peut atteindre à partir de v_0 par deux chemins distincts de longueur au plus i, mais alors quitte à partir du dernier sommet v commun aux deux chemins, on peut construire le cycle $v-w-v$ en utilisant d'abord le premier puis le second chemin.

Soit l le plus petit entier tel que $(d-1)^l \geq n$. Comme $1+d+\cdots+d(d-1)^{i-1} \geq (d-1)^i$, la taille du plus petit cycle de G est inférieure ou égale à $2l$. On en déduit que la taille du plus petit cycle est inférieure à $2\lceil \log_{d-1}(n) \rceil$.

Exercice 5.5. Soit G un graphe avec n sommets et m arêtes tel que $m > n^2/4$. Montrer que G contient un triangle (un cycle de longueur 3).
(**Indication :** Si (u, v) est une arête et que u, v n'ont pas de voisin commun, trouver une relation entre $\deg u$, $\deg v$ et n et sommer cette relation.)

Solution 5.5. On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que si $G = (V, E)$ n'a pas de triangle, il ne peut avoir trop d'arêtes. L'idée est de remarquer que pour deux sommets adjacents u et v, s'il n'y a pas de triangle, $\deg(u) + \deg(v) \leq n$. Il y a n sommets en tout et chacun ne peut être relié qu'à l'un au plus d'entre u et v. En sommant cette relation sur toutes les arêtes, on obtient

$$\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u) + \deg(v)) \leq nm,$$

où m est le nombre d'arêtes. D'autre part,

$$\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u) + \deg(v)) = \sum_{v\in V} \deg(v)^2.$$

En effet, en sommant sur les arêtes, un sommet v de V apparaît autant de fois que son degré. Comme sa contribution est de $\deg(v)$ par arête, on obtient le $\deg(v)^2$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prendre $x_i = \deg(v_i)$ et $y_i = 1$) pour minorer la somme des carrés, on obtient $(2m)^2 = \left(\sum_{v\in V} \deg(v)\right)^2 \leq n \sum_{v\in V} (\deg(v))^2$ et on en déduit que $(2m)^2/n \leq nm$. Ou encore que $m \leq n^2/4$.

Exercice 5.6. (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

Solution 5.6. Comme on s'intéresse uniquement au cardinal de l'ensemble, on peut supposer sans perte de généralité que tous les a_i sont positifs. En ordonnant les éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}^n$ par $\varepsilon \leq_\times \mu$ ssi $\varepsilon_i \leq \mu_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on se rend compte que l'ensemble que l'on cherche forme une antichaîne. En effet, si ε et μ sont comparables, disons $\varepsilon <_\times \mu$, en notant D l'ensemble des positions où ε et μ diffèrent, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = 2 \sum_{i\in D} a_i \ .$$

Donc si D est non vide, la différence entre ces deux sommes est de valeur absolue strictement plus grande que 2 (car $|a_i| > 1$ pour tout i). C'est-à-dire que ε et μ ne peuvent tous deux appartenir à l'ensemble recherché.

On sait que le poset ainsi défini sur $\{-1, 1\}^n$ est isomorphe au poset booléen B_n. Une application directe du théorème de Sperner nous donne alors directement l'inégalité car il nous montre qu'une antichaîne d'un tel poset est de cardinal $\leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Un cas d'égalité est obtenu pour n pair et tous les a_i de même valeur absolue. En effet, dans ce cas l'ensemble solution est clairement en bijection avec les parties à $n/2$ éléments de $\underline{n}$.

Exercice 5.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe dans lequel tous les couples de sommets distincts ont soit zéro soit cinq voisins communs. Montrer que G est un graphe régulier, c'est-à-dire que tout les sommets de G sont de même degré. (Indice : choisir $(a, b) \in E$ et considérer l'ensemble A des voisins de a différents de b et l'ensemble B des voisins de b différents de a).

Solution 5.7. L'idée est de compter l'ensemble C des arêtes (u, v) avec $u \in A$, $v \in B$ de deux manières. Pour tout $u \in A$, u et b ont comme voisin commun a, ils en ont donc exactement 4 autres par hypothèse. De plus, ces voisins sont nécessairement dans B, donc $|C| = 4|A|$. De même, en raisonnant sur les éléments v de B on trouve $|C| = 4|B|$. On en déduit $|A| = |B|$ et donc que tous les sommets adjacents sont nécessairement de même degré. Comme G est connexe, tous ses sommets sont de même degré et G est régulier.

Exercice 5.8. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe des arêtes* de G est le graphe

$$L(G) = (E, \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b) \in E \text{ et } (b, c) \in E\}.$$

1. Si la somme des degrés des sommets de G est s, quel est le nombre de sommets de $L(G)$?
2. Supposons que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ et $\deg(v_i) = d_i$. Exprimer la somme des degrés de $L(G)$.
3. Pour quels graphes connexes G est-il isomorphe à $L(G)$? Justifier sa réponse.

Solution 5.8.

1. Le nombre de sommets de $L(G)$ est exactement le nombre d'arêtes de G. Or $2|E| = s$, on en déduit que le nombre de sommets de $L(G)$ est $s/2$.
2. Pour v_i un des n sommets de G, notons d_i son degré. Il est facile de voir qu'un tel sommet induit $\binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ arêtes dans $L(G)$, il s'agit des arêtes de L(G) qui relient les arêtes adjacentes à v_i dans G. De plus, pour 2 sommets différents de G, ces arêtes induites sont différentes. On en déduit que le nombre d'arêtes m de $L(G)$ vérifie
$$2m = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)\ .$$
La somme des degrés de $L(G)$ étant égale à 2 fois son nombre d'arêtes, on a fini.
3. Une condition nécessaire pour que deux graphes soient isomorphes est qu'ils aient le même nombre de sommets et la même somme des degrés, on obtient donc
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)\ .$$
Ou encore
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 2n + \sum_{i=1}^{n} d_i = 4n\ .$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (prendre $x_i = d_i$ et $y_i = 1$), on sait que
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} d_i)^2/n = 4n$$
De plus le cas d'égalité est atteint ssi le vecteur $(d_i)_{i\leq n}$ est proportionnel au vecteur (1), c'est-à-dire si tous les d_i sont égaux. De plus, pour que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)$ soit vérifiée, la valeur des d_i doit être 2. Finalement une condition nécessaire pour que G soit isomorphe à $L(G)$ est que tous ses sommets soient de degré 2. Pour G connexe, on en déduit qu'une condition nécessaire est qu'il soit un cycle. Réciproquement, un cycle est trivialement isomorphe à son graphe des arêtes, d'où le résultat.