Exercice 7.1. Répondez aux questions suivantes :

1. Quelle est la série génératrice de la suite $1, 1, 1, \ldots$?
2. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^2}$?
3. A quelle suite correspond la série génératrice $\frac{1}{(1-z)^3}$?
4. Utiliser les questions précédentes pour trouver la série génératrice des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$.

Solution 7.1.

1. On vérifie que formellement $(1-x)(1+\cdots+x^n+\cdots)=1$. La série génératrice est $1+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$.
2. En posant $A=\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$ et en appliquant l'opérateur de dérivation formelle ∂, on obtient
$$\partial(A)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$
La suite associée est la suite des entiers strictement positifs.
3. Dérivons une seconde fois, $\partial\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=\frac{2}{(1-x)^3}$. Ainsi
$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n$$
La suite est donc $\left(\binom{n+2}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On décompose la série comme suit
$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n=\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)x^n-\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$$
D'après la question 3, le premier terme vaut $\frac{2}{(1-x)^3}$ et d'après la question 2, le second terme vaut $\frac{1}{(1-x)^2}$. Donc
$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2x^n=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Exercice 7.2. Calculer la série génératrice, puis déduire une forme close des suites suivantes :

1. $a_0=1$ et $a_{n+1}=2a_n+1$.
2. $a_0=1$ et $a_{n+1}=a_n+2^n$.

Solution 7.2.

1. Introduisons la série $A=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$. La relation $\forall n\geq 0$, $a_{n+1}-2a_n-1=0$ peut s'écrire
$$\sum_{n\geq 0}a_{n+1}x^{n+1}-2\sum_{n\geq 0}a_nx^{n+1}-\sum_{n\geq 0}x^{n+1}=0.$$
On reconnaît alors les termes suivants : $A-a_0$, $2xA$ et $\frac{x}{1-x}$. Il s'ensuit que
$$(1-2x)A-\frac{1}{1-x}=0.$$
D'où l'on tire
$$A=\frac{1}{(1-2x)(1-x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}2^{n+1}x^n-\sum_{n\geq 0}x^n.$$
Ainsi $a_n=2^{n+1}-1$.

2. Introduisons la série $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. La relation $\forall n \geq 0$, $a_{n+1} - a_n - 2^n = 0$ peut s'écrire
$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 2^n x^{n+1} = 0.$$
On reconnaît les termes suivants : $A - a_0$, xA et $\frac{x}{1-2x}$. Il s'ensuit que
$$(1-x)A - \frac{1-x}{1-2x} = 0.$$
D'où l'on tire
$$A = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n.$$
Ainsi $a_n = 2^n$ pour tout n.

Exercice 7.3. Les nombres de Pell P_n sont définis par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.
1. Trouver la série génératrice des nombres de Pell.
2. En déduire une formule close pour ces nombres.
3. Quelle est la limite de P_{n+1}/P_n ?
4. Les nombres de Pell font leur apparition très tôt dans les mathématiques et permettent en particulier de construire des approximations rationnelles de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire d'approcher $\sqrt{2}$ par des fractions de la forme p/q avec p et q entiers. En utilisant la question 3, voyez-vous comment ?

Solution 7.3.
1. Soit $P = \sum_{n\geq 0} P_n x^n$ la série génératrice des nombres de Pell. On a par hypothèse
$$\sum_{n\geq 2} P_n x^n - 2\sum_{n\geq 2} P_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 2} P_{n-2}x^n = 0.$$
On reconnaît les termes suivants : $P - P_0 - P_1 x$, $x(P - P_0)$ et $x^2 P$, ce qui conduit à l'équation
$$P - x - 2xP - x^2 P = 0.$$
La série génératrice est donc
$$P = \frac{x}{1-2x-x^2}.$$
2. Comme vu en cours, on décompose de P en éléments simples pour obtenir
$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} P_n x^n &= \frac{x}{1-2x-x^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-x(1+\sqrt{2})} - \frac{1}{1-x(1-\sqrt{2})}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n\geq 0}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)x^n.\end{aligned}$$
D'où, $P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n)$ pour tout $n \geq 0$.
3. On a
$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n} = \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{\frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{1-\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}.$$
Comme $|(1-\sqrt{2})/(1+\sqrt{2})| < 1$, il s'ensuit que $P_{n+1}/P_n \to 1+\sqrt{2}$ lorsque $n \to \infty$.

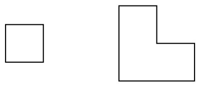
4. Comme $(P_{n+1} - P_n)/P_n \to \sqrt{2}$ quand $n \to \infty$, on dispose d'un algorithme rapide pour approximer $\sqrt{2}$ par des fractions : on calcule les valeurs de P_n ; il ne reste qu'à appliquer la formule ci-dessus. Voici ci-dessous les valeurs des fractions et leur distance à $\sqrt{2}$:

n	P_n	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1}$	$(P_n - P_{n-1})/P_{n-1} - \sqrt{2}$
2	2	1	-0.4142135623
3	5	$\frac{3}{2}$	0.0857864376
4	12	$\frac{7}{5}$	-0.0142135623
5	29	$\frac{17}{12}$	0.0024531042
6	70	$\frac{41}{29}$	-0.0004204589
7	169	$\frac{99}{70}$	0.0000721519
8	408	$\frac{239}{169}$	-0.0000123789
9	985	$\frac{577}{408}$	0.0000021239
10	2378	$\frac{1393}{985}$	-0.0000003644
11	5741	$\frac{3363}{2378}$	0.0000000625
12	13860	$\frac{8119}{5741}$	-0.0000000107
13	33461	$\frac{19601}{13860}$	0.0000000018
14	80782	$\frac{47321}{33461}$	-0.0000000003
15	195025	$\frac{114243}{80782}$	5.4178×10^{-11}
16	470832	$\frac{275807}{195025}$	-9.2955×10^{-12}
17	1136689	$\frac{665857}{470832}$	1.5950×10^{-12}
18	2744210	$\frac{1607521}{1136689}$	-2.7364×10^{-13}
19	6625109	$\frac{3880899}{2744210}$	4.6948×10^{-14}

Exercice 7.4. Calculer la somme
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} .$$
(Indice : exprimer cette somme comme un coefficient d'un produit de deux polynômes).

Solution 7.4. Soient $f = \sum_i \binom{n}{i}(-x)^i$ et $g = \sum_i \binom{n}{i}(x)^i$. La somme en question est le coefficient de x^n dans gf. Mais $f = (1-x)^n$ et $g = (1+x)^n$, si bien que $gf = (1-x^2)^n$. Le coefficient de x^n dans ce polynome est nul si n est impair et vaut $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$ si n est pair.

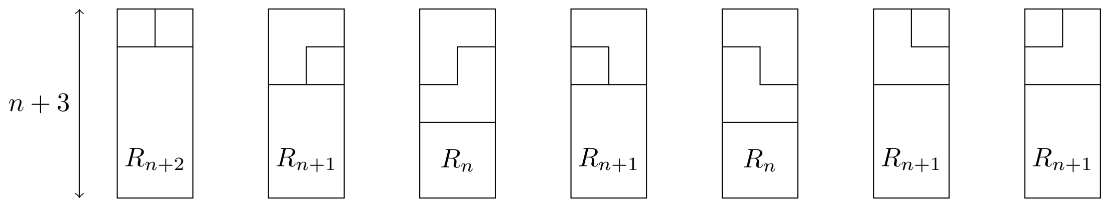
Exercice 7.5. On considère un rectangle de taille $n \times 2$. On note R_n le nombre de pavages du rectangle par les pièces dessinées ci-dessous et orientées dans n'importe quel sens. Par convention, $R_0 = 1$.



1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+3} = R_{n+2} + 4R_{n+1} + 2R_n$ et que $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 11$.
2. Exprimer la série génératrice $S(x)$ de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous forme d'une fraction rationnelle.
3. Donner une forme close de R_n et un équivalent asymptotique de R_n quand $n \to +\infty$.

Solution 7.5.

1. Soit la dernière bande du rectangle ne contient que que des petits carrés, soit elle contient une équerre. On a donc les possibilités suivantes.



   ce qui justifie la formule
2. On a $R_1 = 1$, $R_2 = 5$ et $R_3 = 11$ ($R_0 = 1$ pour compléter la formule). Par ailleurs
$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+3}x^{n+3} - x\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+2}x^{n+2} - 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} R_{n+1}x^{n+1} - 2x^3\sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n = 0$$
   soit en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n x^n$,
$$(S(x) - 1 - x - 5x^2) - x(S(x) - 1 - x) - 4x^2(S(x) - 1) - 2x^3 S(x) = 0,$$
   et donc
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1 - x - 4x^2 - 2x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-2x-2x^2)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1-(1+\sqrt{3})x)(1-(1-\sqrt{3})x)}. \end{aligned}$$
3. On décompose $S(x)$ en éléments simples pour obtenir
$$S(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(1+\sqrt{3})x} + \frac{\frac{-\sqrt{3}}{3}}{1-(1-\sqrt{3})x}.$$
   D'où
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\sqrt{3})^n x^n - \frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1-\sqrt{3})^n x^n.$$
   On a ainsi
$$R_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^n - \frac{\sqrt{3}}{3}(1-\sqrt{3})^n.$$

De plus asymptotiquement, comme $|1-\sqrt{3}|<1$ et $1+\sqrt{3}>1$,

$$R_n \sim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{3})^n.$$

Exercice 7.6. Soit $\exp \in \mathbb{R}[[x]]$ la série formelle définie par

$$exp = exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$$

On écrit par convention $exp(x) = e^x$. Montrer que

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^{a+x} = e^a \cdot e^x$ dans $\mathbb{R}[[x]]$,
2. $\frac{1}{exp}$ existe et $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Solution 7.6.

1.

$$\begin{aligned} e^{(a+x)} &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(a+x)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i x^{n-i}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}a^i x^{n-i} \\ &= \sum_{k\geq 0} c_k x^k, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ i\in\{0,\dots,n\} \\ n-i=k}} \frac{1}{i!(n-i)!}a^i \\ &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\geq k}} \frac{1}{(n-k)!k!}a^{n-k} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{k!}\frac{a^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!}e^a. \end{aligned}$$

On note que ce dernier calcul a lieu dans $\mathbb{R}$, et qu'on a utilisé le changement de variables $i = n-k$. On a donc bien

$$e^{(a+x)} = e^a \cdot \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!} = e^a \cdot e^x.$$

2. Comme le terme de degré 0 de e^x est 1, $1/e^x$ existe. De plus,

$$\begin{aligned}
e^x \cdot e^{-x} &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j=n}} \frac{1}{i!}\frac{(-1)^j}{j!}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} (1-1)^n x^n \\
&= 1 + 0 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Exercice 7.7. Fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

1. Vérifier que $\frac{e^x-1}{x}$ est un élément de $\mathbb{R}[[x]]$ qui admet un inverse. On écrit

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Les nombres B_k sont les nombres de Bernoulli.

2. Montrer que $B_0 = 1$ et que les nombres de Bernoulli satisfont l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \forall n \geq 1.$$

puis calculer B_k pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

3. Montrer que $B_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$ (indication : montrer que $P(x) = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}$ est une série fomelle paire, i.e. $P(x) = P(-x)$, et conclure).

Solution 7.7.

1. Le premier terme non nul de $e^x - 1$ est x. Ainsi $\frac{e^x-1}{x}$ a un terme de degré 0 égal à 1, et donc la série formelle admet un inverse dans $\mathbb{R}[[x]]$, de terme constant égal à 1, qu'on notera $\frac{x}{e^x-1}$. On écrit

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$$

et on définit les nombre de Bernouilli comme étant les coefficients B_k.

2. On a

$$x = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell!} x^\ell\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{\ell\geq 0} \frac{1}{(\ell+1)!} x^\ell\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!} \frac{1}{(n-i+1)!}\right) x^n.
\end{aligned}$$

Donc pour $n = 0$ on obtient
$$\frac{B_0}{0!}\frac{1}{1} = 1 \Rightarrow B_0 = 1,$$
et pour $n \geq 1$, on doit avoir
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!}\frac{1}{(n-i+1)!} = 0,$$
i.e.,
$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i = 0,$$
et donc
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i = 0.$$
En utilisant $n = 1$ on obtient
$$\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{B_0}{2} = -\frac{1}{2}.$$
Avec $n = 2$ on obtient
$$\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}.$$
Avec $n = 3$:
$$\sum_{i=0}^{3}\binom{4}{i}B_i = 0 \Rightarrow B_3 = 0.$$
Avec $n = 4$:
$$\sum_{i=0}^{4}\binom{5}{i}B_i = 0 \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{30}.$$
Avec $n = 5$:
$$\sum_{i=0}^{5}\binom{6}{i}B_i = 0 \Rightarrow B_5 = 0.$$

3. On commence par prouver l'indication :
$$P(x) - P(-x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{-x}{e^{-x} - 1} - \frac{x}{2}\right).$$
On sait que $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ dans $\mathbb{R}[[x]]$, et donc
$$\begin{aligned} P(x) - P(-x) &= \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} + \frac{x}{\frac{1}{e^x} - 1} + \frac{x}{2} \\ &= \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} + \frac{2xe^x + x(1 - e^x)}{2(1 - e^x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$
On constate que $P(x) = \frac{x}{e^x - 1} - B_1 x$, et qu'en notant $P(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$, on a
$$0 = P(x) - P(-x) = \sum_{i\geq 0} 2a_{2i+1}x^{2i+1},$$
et donc $a_{2i+1} = 0$ pour tout $i \geq 0$, d'où $\frac{B_{2i+1}}{(2i+1)!} = 0$ pour tout $i \geq 1$.