SVD appliquée à la compression d'image

Thibault Vatter[1]

[1]Department of Mathematics,
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
and
Faculty of Business and Economics,
University of Lausanne

December 12, 2016

Les images vues comme des matrices

Une image de résolution 1323×1984 pixels:

3 couleurs par pixels $\Longrightarrow$ on représente l'image avec une $m \times n$ matrice $A = (A_{red}\ A_{green}\ A_{blue})$, $m = 1323$ et $n = 1984 \times 3 = 5952$!

Norme de Frobenius

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Definition: norme de Frobenius

Soit A une matrix $m \times n$, la norme de Frobenius est

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2}.$$

Remarque: on peut montrer que $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}$ où r est le nombre de valeurs singulières non-nulles.

On cherche A_k, une matrice $m \times n$ telle que

$$A_k = \underset{X \textbf{ t.q. } rg\,X = k}{\textbf{argmin}} ||A - X||_F \textbf{ pour } k \leq r.$$

Rappel: $rg\, A = r$.

Approximation de rang faible

On cherche A_k, une matrice $m \times n$ telle que

$$A_k = \underset{X \text{ t.q. } rg\, X = k}{\textbf{argmin}} ||A - X||_F \textbf{ pour } k \le r.$$

Théorème: approximation de rang faible

Soient $U = (u_1 \cdots u_m)$, $V = (v_1 \cdots v_n)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ les matrices de la SVD de A, alors

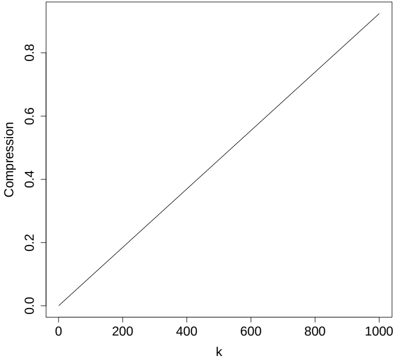
$$A_k = U_k D_k V_k^\top$$

où $U_k = (u_1 \cdots u_k)$, $V_k = (v_1 \cdots v_k)$ et D_k une matrice diagonale contenant les k premières valeurs singulières de A.

Remarque: on peut montrer que $||A - A_k||_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2}$

Utilité pour la compression

- Initialement, l'image contient $m \times n$ éléments.
- Idée: stocker uniquement les $k \ll r$ colonnes de U et V et valeurs singulières correspondantes.
- On a donc $(m + n + 1) \times k$ éléments.
- Pour une l'image RGB de 1323×1984, utiliser $k = 100$ donne $(1323 + 3 \times 1984 + 1) \times 100/(1323 \times 3 \times 1984) \simeq 9.2\%$.

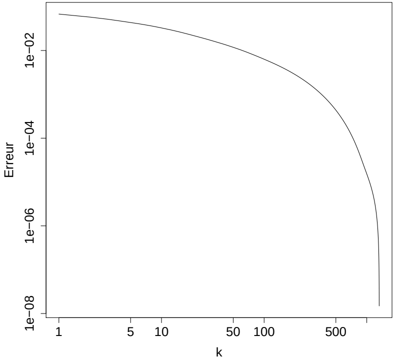


L'erreur de reconstruction

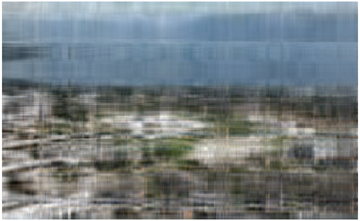
On a:

$$\left.\begin{aligned} ||A||_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \\ ||A - A_k||_F &= \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{||A - A_k||_F}{||A||_F} = \frac{\sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}}$$



Compression avec $k = 10$



Compression avec $k = 50$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Compression avec $k = 100$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Compression avec $k = 500$