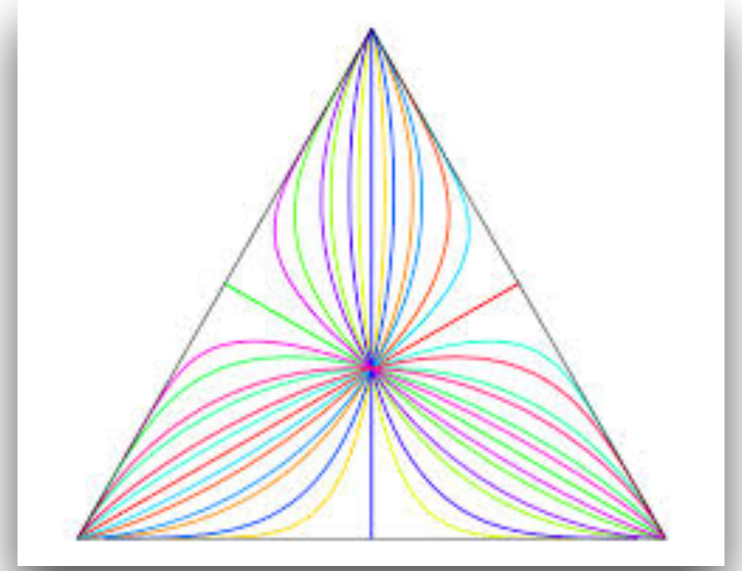
Espaces vectoriels



La dernière fois: la dimension

Théorème 12.2: Soit V un espace vectoriel engendré par un système générateur fini. Chaque base de V a le même nombre d'éléments, appelé *la dimension* de V.

On a seulement montré que si il y a deux bases, elles ont le même nombre d'éléments.

Mais on n'a pas montré que une base toujours existe (sauf quand V contient que le vecteur $\mathbf{0}$).

Existence d'une base

Théorème 13.1: Soit V un espace vectoriel engendré par un système générateur fini, $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Alors, V a une base.

Démonstration

Comme toujours, dans plusieurs étapes…

Soit G un système générateur fini de V et B un sous-ensemble libre de G avec le nombre maximum d'éléments.

Démonstration

Comme toujours, dans plusieurs étapes…

Soit G un système générateur fini de V et B un sous-ensemble libre de G avec le nombre maximum d'éléments.

C'est-à-dire

- Les éléments de B sont linéairement indépendants,
- Si T est un sous-ensemble libre de G, donc $|T| \leq |B|$
- Si C est un sous-ensemble de G avec plus d'éléments que B, donc C n'est pas libre

Démonstration

Comme toujours, dans plusieurs étapes…

Soit G un système générateur fini de V et B un sous-ensemble libre de G avec le nombre maximum d'éléments.

C'est-à-dire
- Les éléments de B sont linéairement indépendants,
- Si T est un sous-ensemble libre de G, donc $|T| \leq |B|$
- Si C est un sous-ensemble de G avec plus d'éléments que B, donc C n'est pas libre

Première étape: $B \neq \emptyset$.

Par l'hypothèse, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, donc G a un élément $\boldsymbol{c}$ qui n'est pas $\mathbf{0}$. Alors, $\{\boldsymbol{c}\}$ est libre et donc $|B| \geq |\{\boldsymbol{c}\}| = 1$. Donc, B ne peut pas être vide.

Démonstration

Comme toujours, dans plusieurs étapes…

Soit *G* un système générateur fini de *V* et *B* un sous-ensemble libre de *G* avec le nombre maximum d'éléments.

C'est-à-dire
- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc $|T| \leq |B|$
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

<u>Première étape</u>: $B \neq \emptyset$.

Par l'hypothèse, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, donc *G* a un élément $\boldsymbol{c}$ qui n'est pas $\mathbf{0}$. Alors, $\{\boldsymbol{c}\}$ est libre et donc $|B| \geq |\{\boldsymbol{c}\}|=1$. Donc, *B* ne peut pas être vide.

Démonstration

Comme toujours, dans plusieurs étapes...

Soit G un système générateur fini de V et B un sous-ensemble libre de G avec le nombre maximum d'éléments.

C'est-à-dire

- Les éléments de B sont linéairement indépendants,
- Si T est un sous-ensemble libre de G, donc $|T| \leq |B|$
- Si C est un sous-ensemble de G avec plus d'éléments que B, donc C n'est pas libre

<u>Première étape</u>: $B \neq \emptyset$.

Par l'hypothèse, $V \neq \{\mathbf{0}\}$, donc G a un élément $\boldsymbol{c}$ qui n'est pas $\mathbf{0}$. Alors, $\{\boldsymbol{c}\}$ est libre et donc $|B| \geq |\{\boldsymbol{c}\}|=1$. Donc, B ne peut pas être vide.

On pose $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$.

Démonstration

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\mathbf{c} \notin \langle B \rangle$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire
- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire

- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Démonstration

<u>Deuxième étape</u>: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire

- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Si $\{\mathbf{c}\} \cup B$ n'est pas libre, il y a $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, pas tous nuls, tels que

$$a_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + a_n \mathbf{b}_n + a\mathbf{c} = 0$$

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire
- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Si $\{\mathbf{c}\} \cup B$ n'est pas libre, il y a $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, pas tous nuls, tels que

$$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n + a\mathbf{c} = 0$$

Si $a = 0$, donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ parce que $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants. Mais par l'hypothèse, a, $a_1,\ldots,a_n$ ne sont pas tous nuls, donc $a \neq 0$.

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire

- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Si $\{\mathbf{c}\} \cup B$ n'est pas libre, il y a $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, pas tous nuls, tels que

$$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n + a\mathbf{c} = 0$$

Si *a* = 0, donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ parce que $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants. Mais par l'hypothèse, a, a_1,…,a_n ne sont pas tous nuls, donc $a \neq 0$.

Alors, $\mathbf{c} = -\frac{a_1}{a}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{a_n}{a}\mathbf{b}_n$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$, une contradiction à l'hypothèse $\mathbf{c} \notin \langle B \rangle$.

Démonstration

Deuxième étape: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire

- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Si $\{\mathbf{c}\} \cup B$ n'est pas libre, il y a $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, pas tous nuls, tels que

$$a_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + a_n \mathbf{b}_n + a\mathbf{c} = 0$$

Si *a* = 0, donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ parce que $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants. Mais par l'hypothèse, $a, a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls, donc $a \neq 0$.

Alors, $\mathbf{c} = -\frac{a_1}{a}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{a_n}{a}\mathbf{b}_n$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$, une contradiction à l'hypothèse $\mathbf{c} \notin \langle B \rangle$.

Démonstration

<u>Deuxième étape</u>: $G \subseteq \langle B \rangle$, ca veut dire, les éléments de *G* sont des combinaisons linéaire des ceux-ci de *B*.

C'est-à-dire

- Les éléments de *B* sont linéairement indépendants,
- Si *T* est un sous-ensemble libre de *G*, donc |*T*| ≤ |*B*|
- Si *C* est un sous-ensemble de *G* avec plus d'éléments que *B*, donc *C* n'est pas libre

Soit ***c*** un élément de *G*.

(a) Si $\mathbf{c} \in B$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$

(b) Soit $\mathbf{c} \notin B$. Si $\boxed{\mathbf{c} \notin \langle B \rangle}$, on montre que l'ensemble $\{\mathbf{c}\} \cup B$ est libre, ce qui nous donne une contradiction.

Si $\{\mathbf{c}\} \cup B$ n'est pas libre, il y a $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in K$, pas tous nuls, tels que

$$a_1\mathbf{b}_1 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n + a\mathbf{c} = 0$$

Si $a = 0$, donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ parce que $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants. Mais par l'hypothèse, $a, a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas tous nuls, donc $a \neq 0$.

Alors, $\mathbf{c} = -\frac{a_1}{a}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{a_n}{a}\mathbf{b}_n$, donc $\mathbf{c} \in \langle B \rangle$, une contradiction à l'hypothèse $\mathbf{c} \notin \langle B \rangle$. Alors $G \subseteq \langle B \rangle$

Démonstration

Troisième étape: $\langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle$

Démonstration

Troisième étape: $\langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle$

Chaque élément de *G* est une combinaison linéaire d'éléments de *B,* grace à la deuxième étape.

Démonstration

<u>Troisième étape</u>: $\langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle$

Chaque élément de *G* est une combinaison linéaire d'éléments de *B,* grace à la deuxième étape.

Chaque élément de $\langle G \rangle$ est une combinaison linéaire d'éléments de *G,* par définition

Démonstration

Troisième étape: $\langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle$

Chaque élément de *G* est une combinaison linéaire d'éléments de *B,* grace à la deuxième étape.

Chaque élément de $\langle G \rangle$ est une combinaison linéaire d'éléments de *G,* par définition

Donc, chaque élément de $\langle G \rangle$ est une combinaison linéaire d'éléments de *B,* ca veut dire, $\langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle$

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

$$V = \langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$$

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

$$\underbrace{V =}_{\text{Par l'hypothèse}} \langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$$

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

Troisième étape

$$V = \langle G \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$$

Par l'hypothèse

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B\rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

$$V \underset{\text{Par l'hypothèse}}{=} \langle G\rangle \overset{\text{Troisième étape}}{\subseteq} \langle B\rangle \underset{\text{Car } B \subseteq V}{\subseteq} V$$

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc *B* est une base de *V* car *B* est libre par construction.

Troisième étape

$$V \underset{\text{Par l'hypothèse}}{=} \langle G \rangle \overset{\text{Troisième étape}}{\subseteq} \langle B \rangle \underset{\text{Car } B \subseteq V}{\subseteq} V$$

Par l'hypothèse

Car $B \subseteq V$

$$\Downarrow$$

Egalité partout

Démonstration

Quatrième étape: $\langle B \rangle = V$

donc B est une base de V car B est libre par construction.

Troisième étape

$$V \underset{\text{Par l'hypothèse}}{=} \langle G \rangle \overset{\text{Troisième étape}}{\subseteq} \langle B \rangle \underset{\text{Car } B \subseteq V}{\subseteq} V$$

Par l'hypothèse

Car $B \subseteq V$

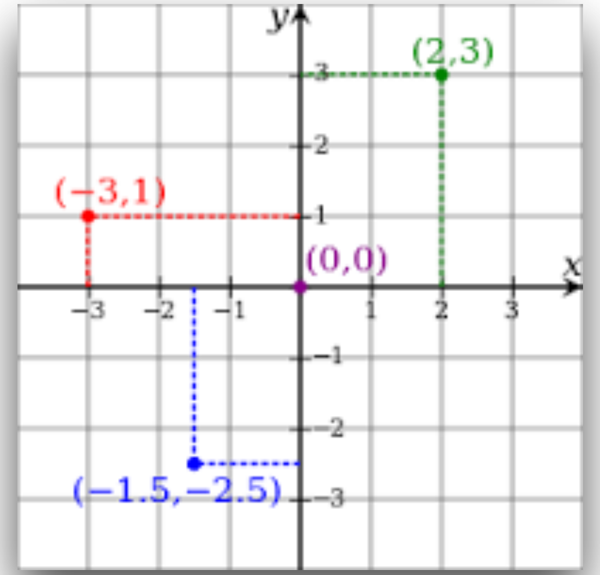
$$\Downarrow$$

Egalité partout

$$\Downarrow$$

$$\langle B \rangle = V$$

Les coordonnées



Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Proposition 13.1: Chaque ***a*** de *V* a une représentation unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base *B*.

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Proposition 13.1: Chaque ***a*** de *V* a une représentation unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base *B*.

Démonstration: Il faut montrer deux points.

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Proposition 13.1: Chaque ***a*** de *V* a une représentation unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base *B*.

Démonstration: Il faut montrer deux points.

1. Chaque ***a*** a une représentation comme combinaison linéaire d'éléments de *B*. *B* est une base, alors, par définition *B* engendre *V*. C'est-à-dire, pour chaque ***a*** il y a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ tels que $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Proposition 13.1: Chaque ***a*** de *V* a une représentation unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base *B*.

Démonstration: Il faut montrer deux points.

1. Chaque ***a*** a une représentation comme combinaison linéaire d'éléments de *B*. *B* est une base, alors, par définition *B* engendre *V*. C'est-à-dire, pour chaque ***a*** il y a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ tels que $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$
2. La représentation est unique. Si $\mathbf{a} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{a} - \mathbf{a} \\
&= (c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) - (d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n) \\
&= (c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{b}_n
\end{aligned}$$

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Proposition 13.1: Chaque ***a*** de *V* a une représentation unique comme combinaison linéaire d'éléments de la base *B*.

Démonstration: Il faut montrer deux points.

1. Chaque ***a*** a une représentation comme combinaison linéaire d'éléments de *B*. *B* est une base, alors, par définition *B* engendre *V*. C'est-à-dire, pour chaque ***a*** il y a $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ tels que $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$
2. La représentation est unique. Si $\mathbf{a} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{a} - \mathbf{a} \\
&= (c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) - (d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n) \\
&= (c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{b}_n
\end{aligned}$$

Mais les éléments de *B* sont linéairement indépendants, car *B* est une base. Donc, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$, ce que on voulait montrer.

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Définition 13.1: Soit ***a*** un vecteur de *V*. Si $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$, on appelle $c_1, c_2, .., c_n$ *les coordonnées* de ***a*** par rapport à la base *B*.

On écrit $[\boldsymbol{a}]_B :=$ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est on l'appelle le *vecteur de coordonnées* de ***a*** par rapport à B.

On appelle l'application $V \to K^n$, $\mathbf{a} \mapsto [\mathbf{a}]_B$ *l'application de coordonnées* par rapport à la base *B*.

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Définition 13.1: Soit ***a*** un vecteur de *V.* Si $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$, on appelle $c_1, c_2, .., c_n$ *les coordonnées* de ***a*** par rapport à la base *B.*

On écrit $[\mathbf{a}]_B :=$ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est on l'appelle le *vecteur de coordonnées* de ***a*** par rapport à B.

On appelle l'application $V \to K^n$, $\mathbf{a} \mapsto [\mathbf{a}]_B$ *l'application de coordonnées* par rapport à la base *B.*

Note 13.1: Pour chaque ***a*** de *V* on a $\mathbf{a} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \cdot [\mathbf{a}]_B$

Les coordonnées

K corps, *V* un espace vectoriel sur *K*, $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de *V*.

Définition 13.1: Soit ***a*** un vecteur de *V*. Si $\mathbf{a} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$, on appelle $c_1, c_2, .., c_n$ *les coordonnées* de ***a*** par rapport à la base *B*.

On écrit $[\mathbf{a}]_B := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est on l'appelle le *vecteur de coordonnées* de ***a*** par rapport à B.

On appelle l'application $V \to K^n$, $\mathbf{a} \mapsto [\mathbf{a}]_B$ *l'application de coordonnées* par rapport à la base *B*.

Note 13.1: Pour chaque ***a*** de *V* on a $\mathbf{a} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) \cdot [\mathbf{a}]_B$

Car $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) \cdot [\mathbf{a}]_B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est dans la forme échelonnée

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- $\boxed{\text{Montrer que } B \text{ est une base de} \mathbb{R}^2}$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est dans la forme échelonnée

Chaque colonne est pivot, donc les colonnes sont linéairement indépendantes.

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- $\boxed{\text{Montrer que } B \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est dans la forme échelonnée

Chaque colonne est pivot, donc les colonnes sont linéairement indépendantes.

Chaque ligne a une position pivot, donc les colonnes engendrent $\mathbb{R}^2$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est dans la forme échelonnée

Chaque colonne est pivot, donc les colonnes sont linéairement indépendantes.

Chaque ligne a une position pivot, donc les colonnes engendrent $\mathbb{R}^2$

Donc, *B* est une base.

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

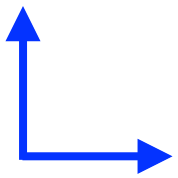
- Montrer que *B* est une base de $\mathbb{R}^2$
- Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

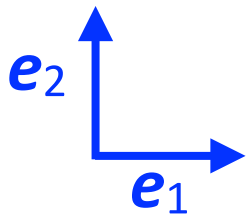
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple

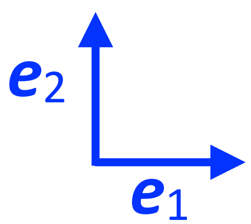
Exemple



Exemple

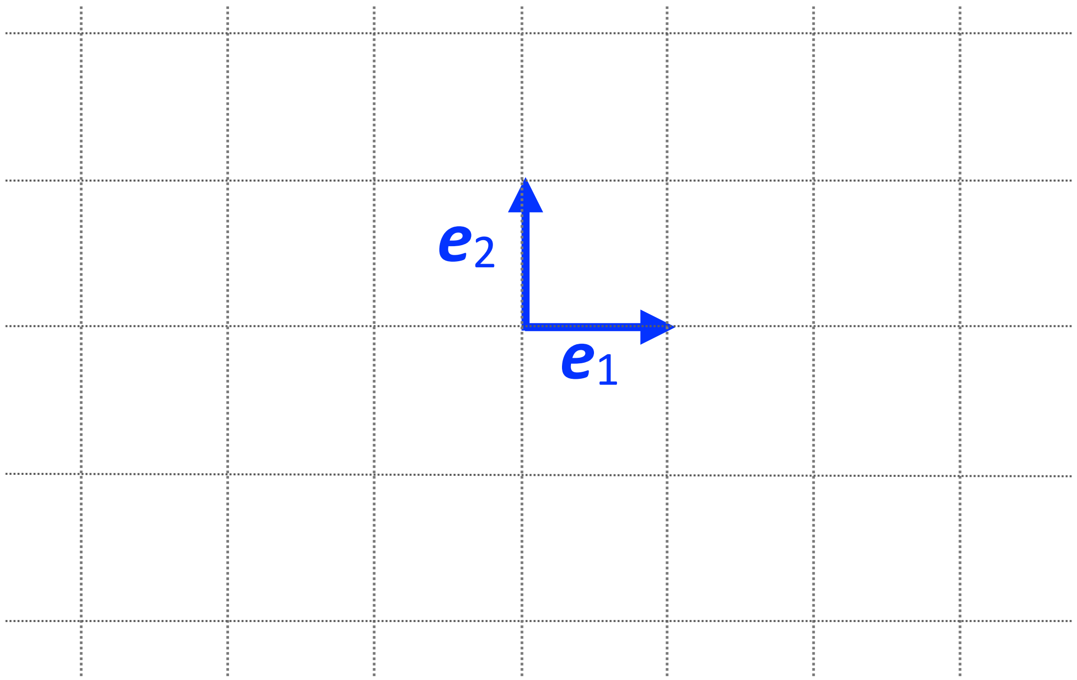


Exemple



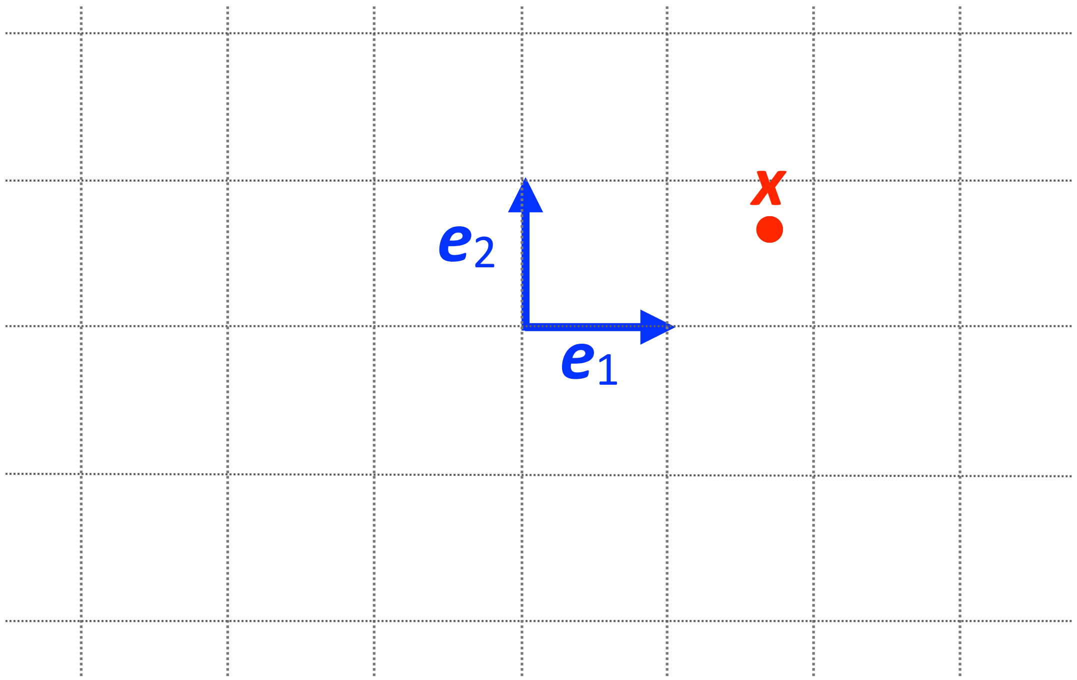
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple



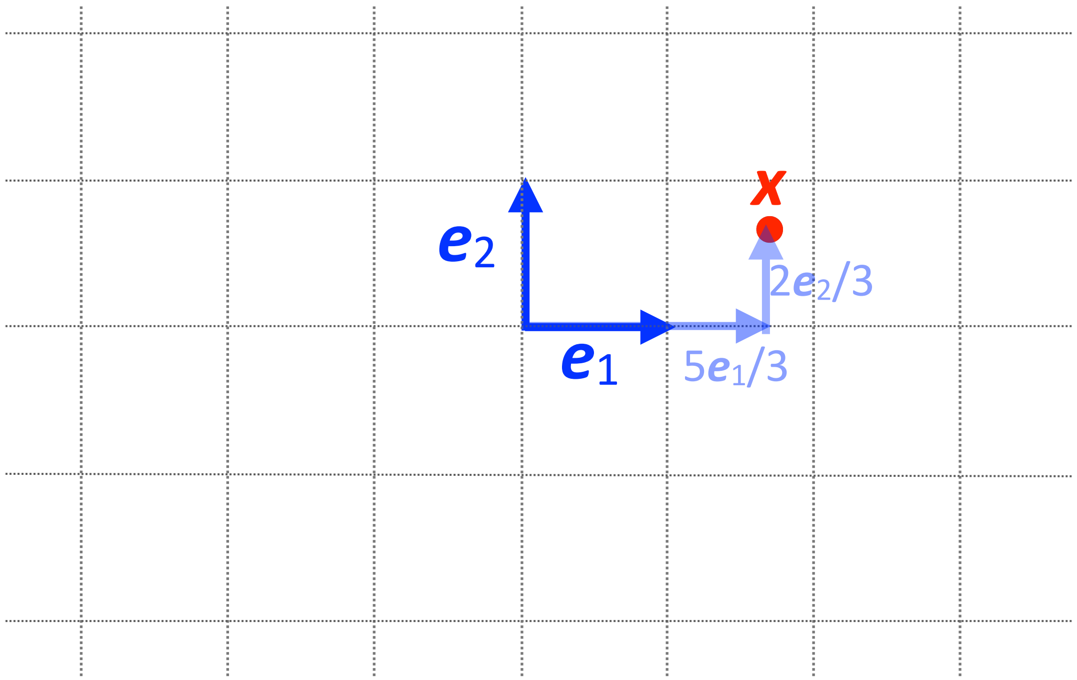
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple



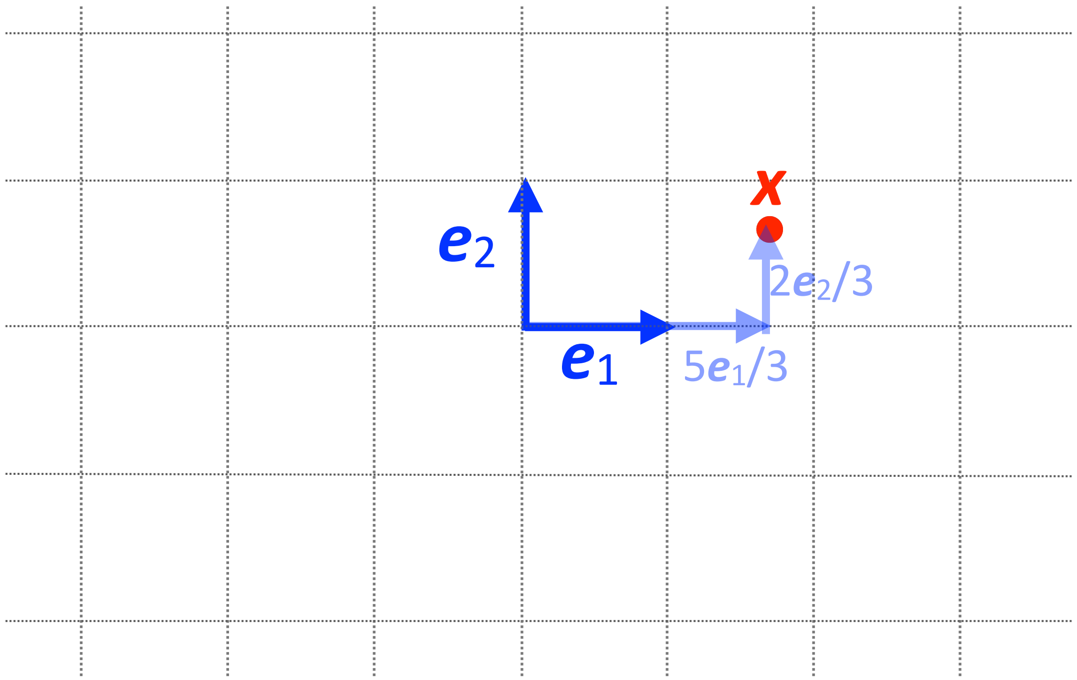
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple



$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

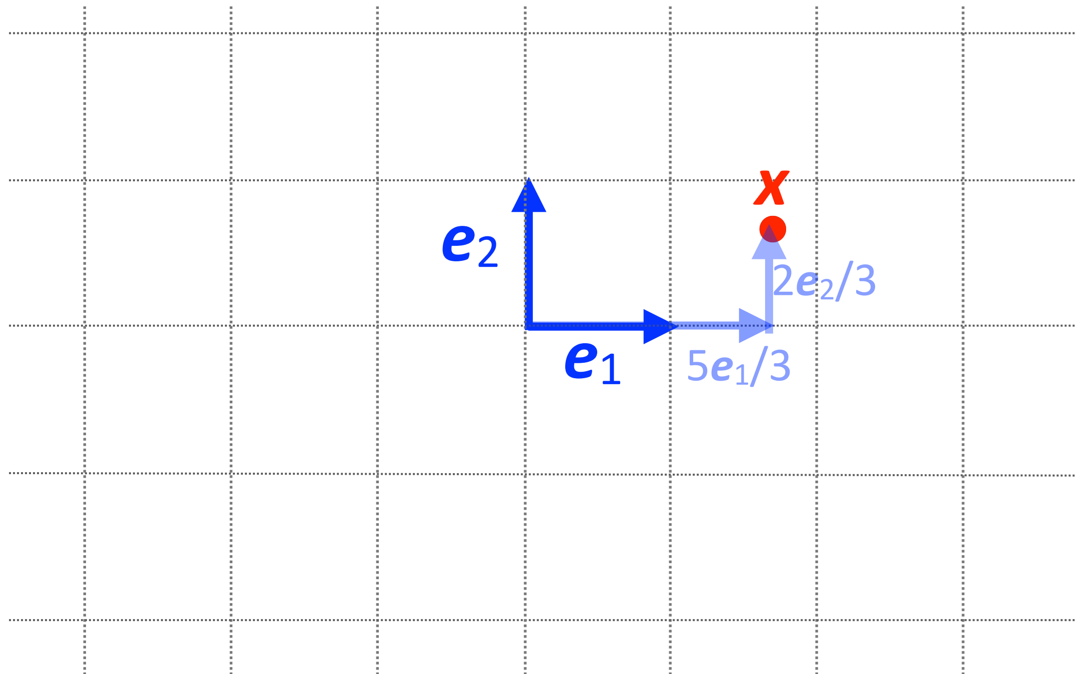
Exemple

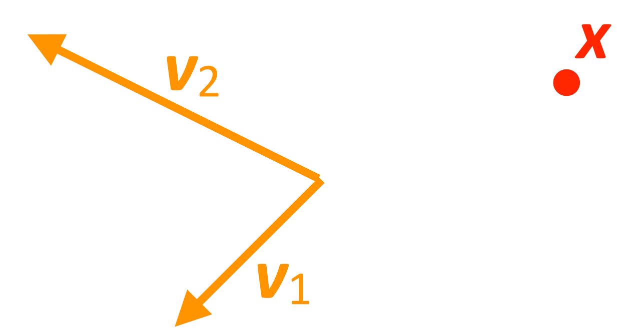


$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple

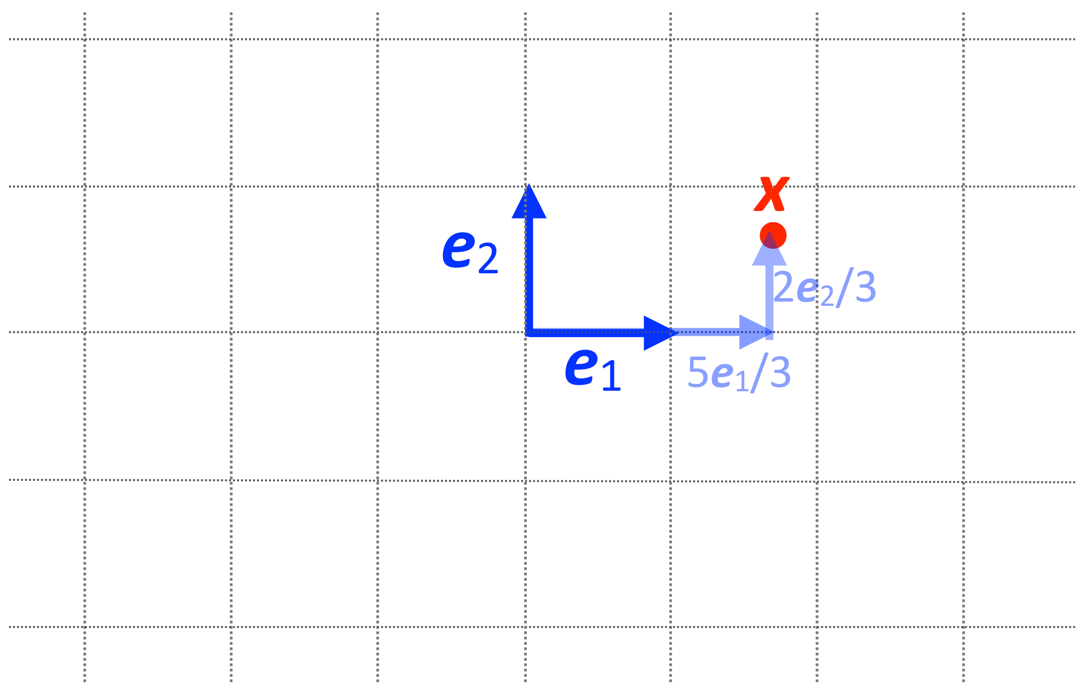


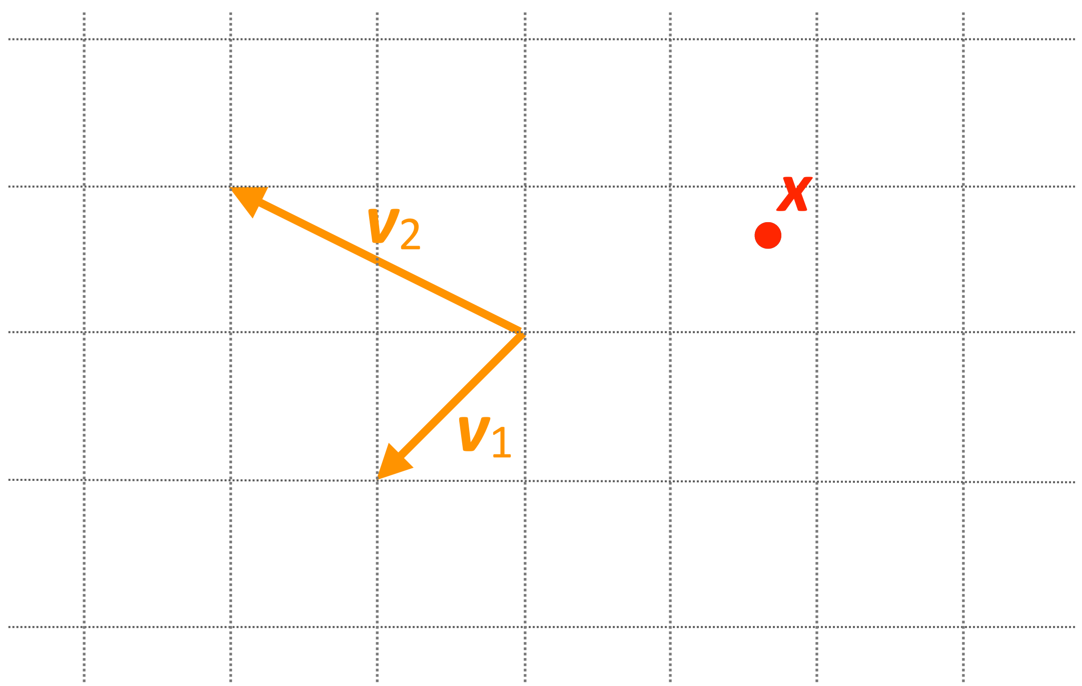


$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple

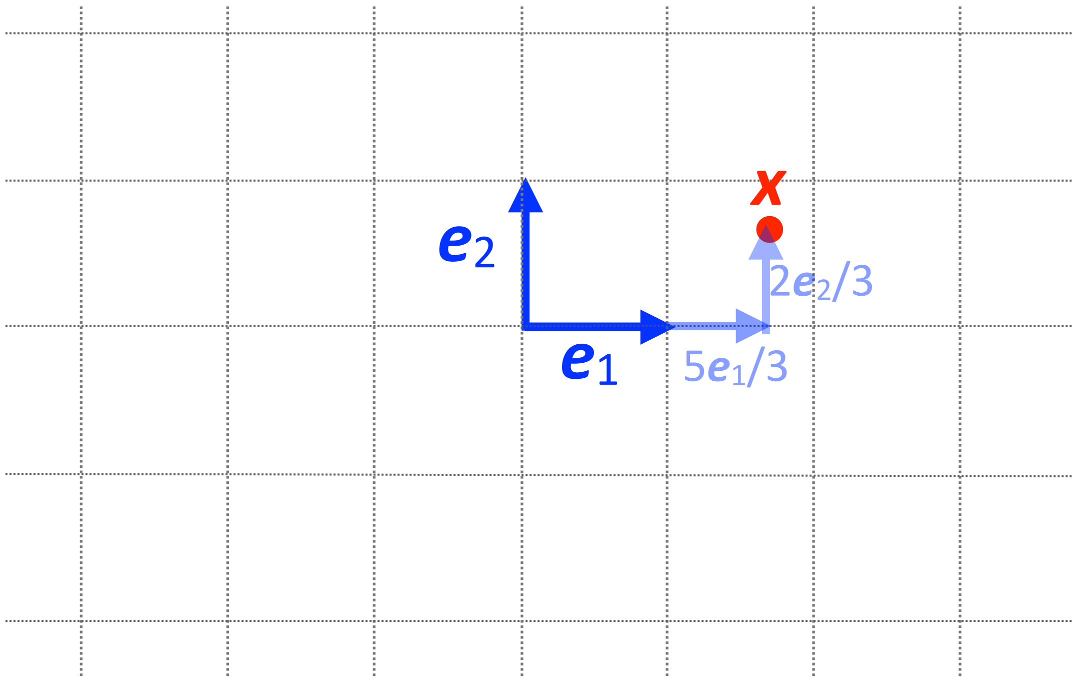


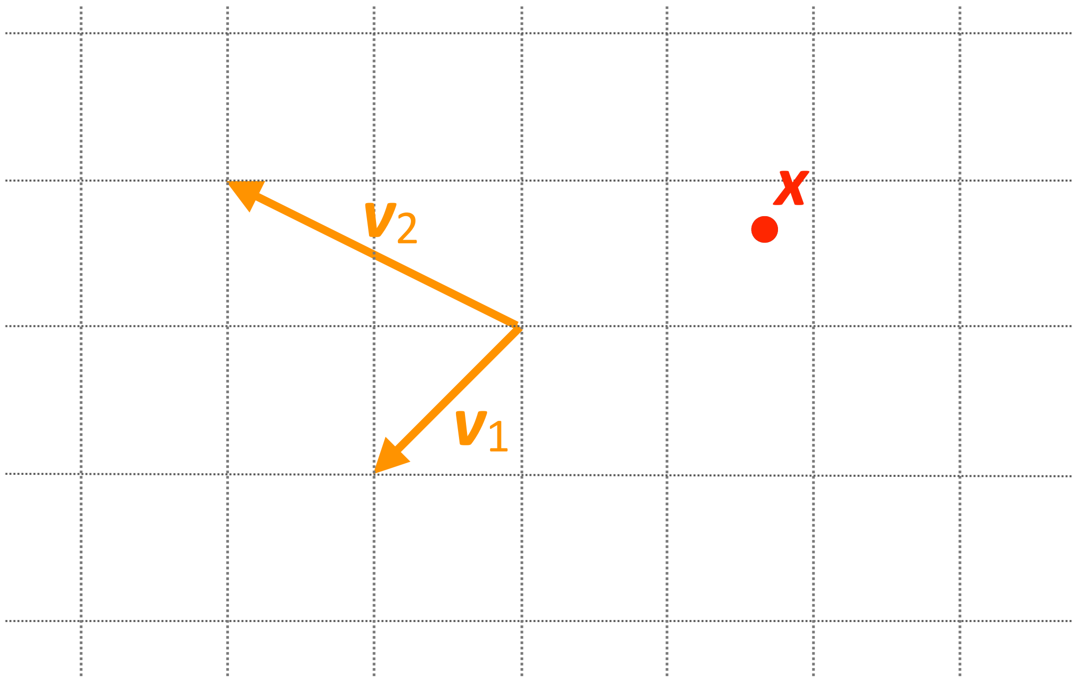


$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple



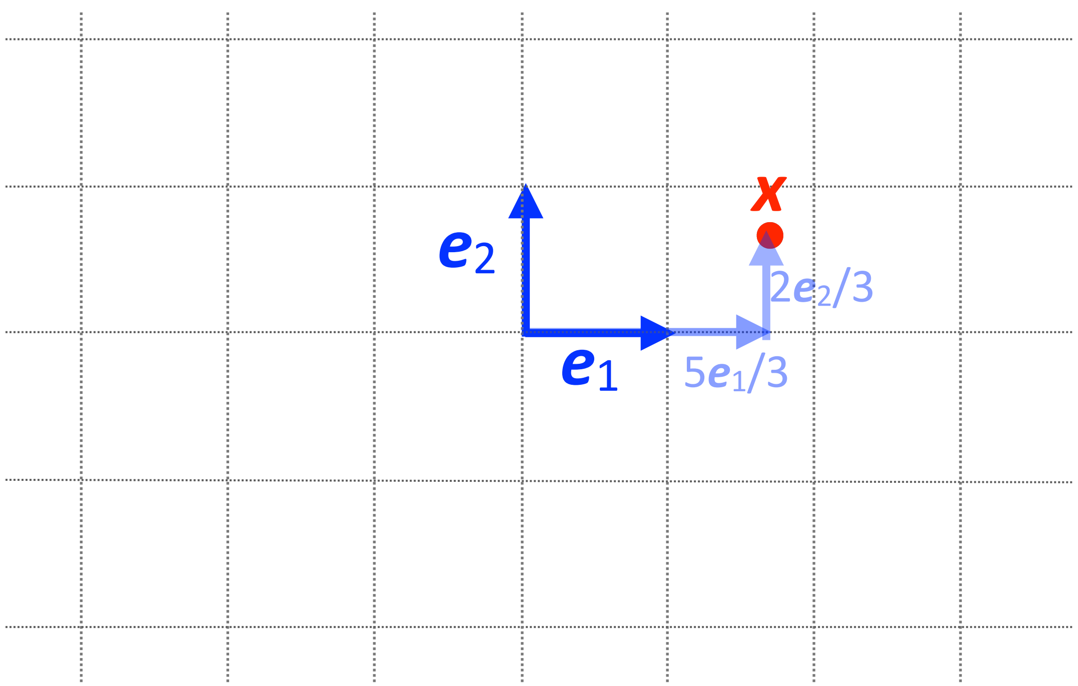


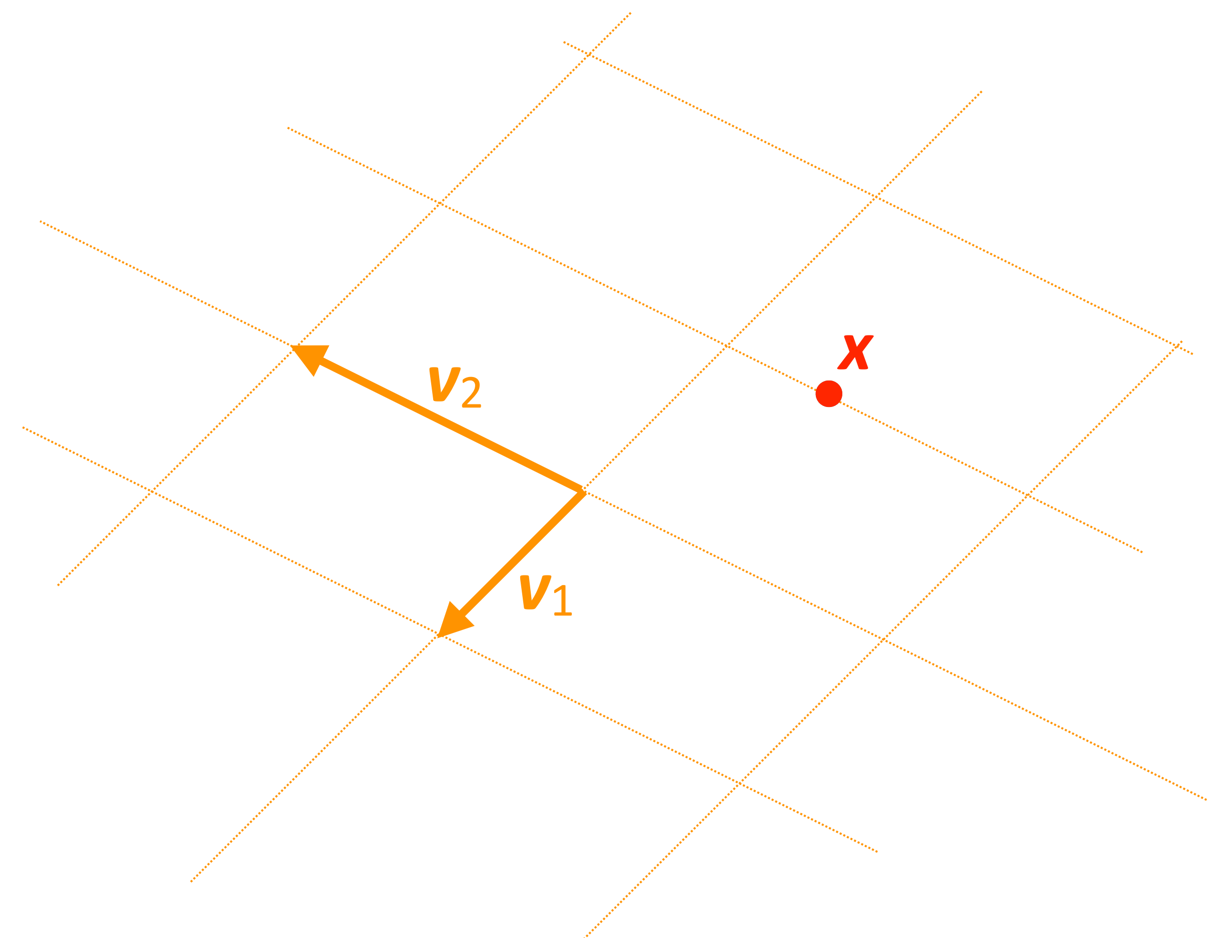
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple



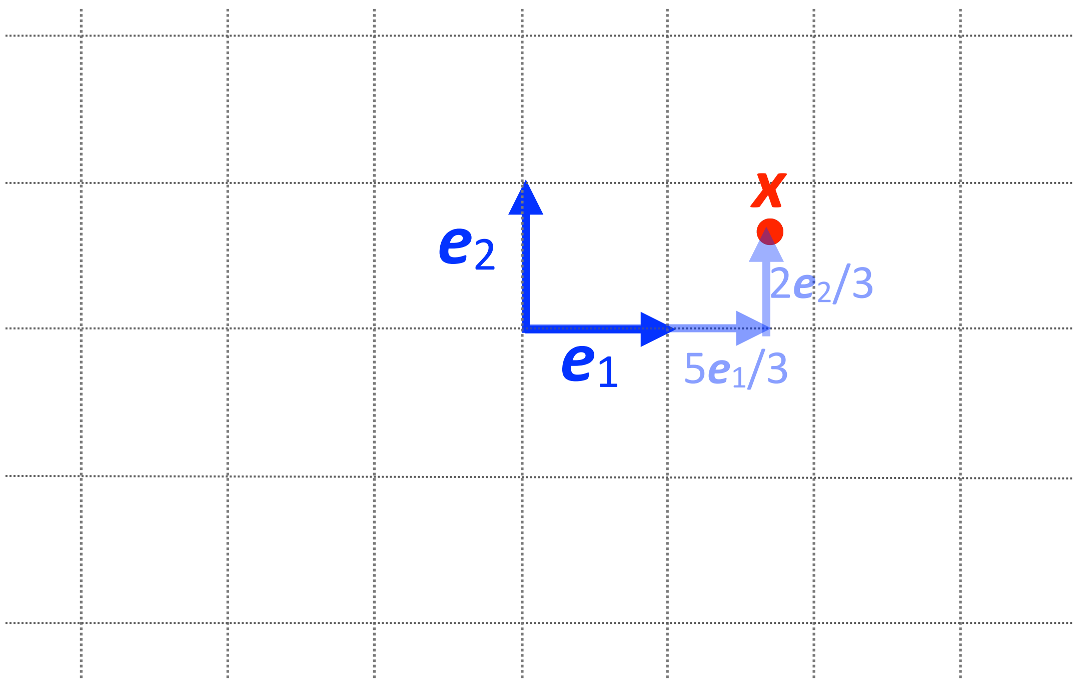


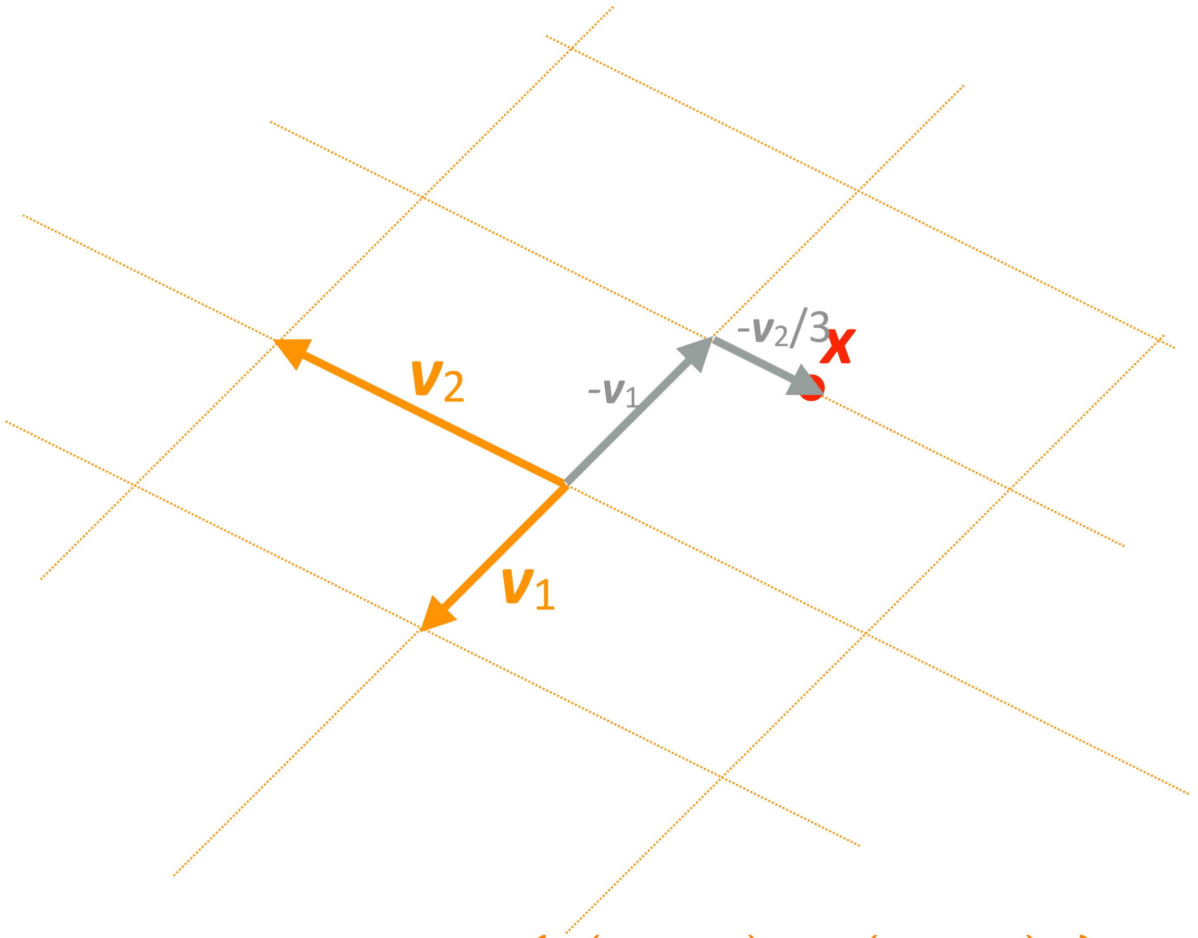
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple



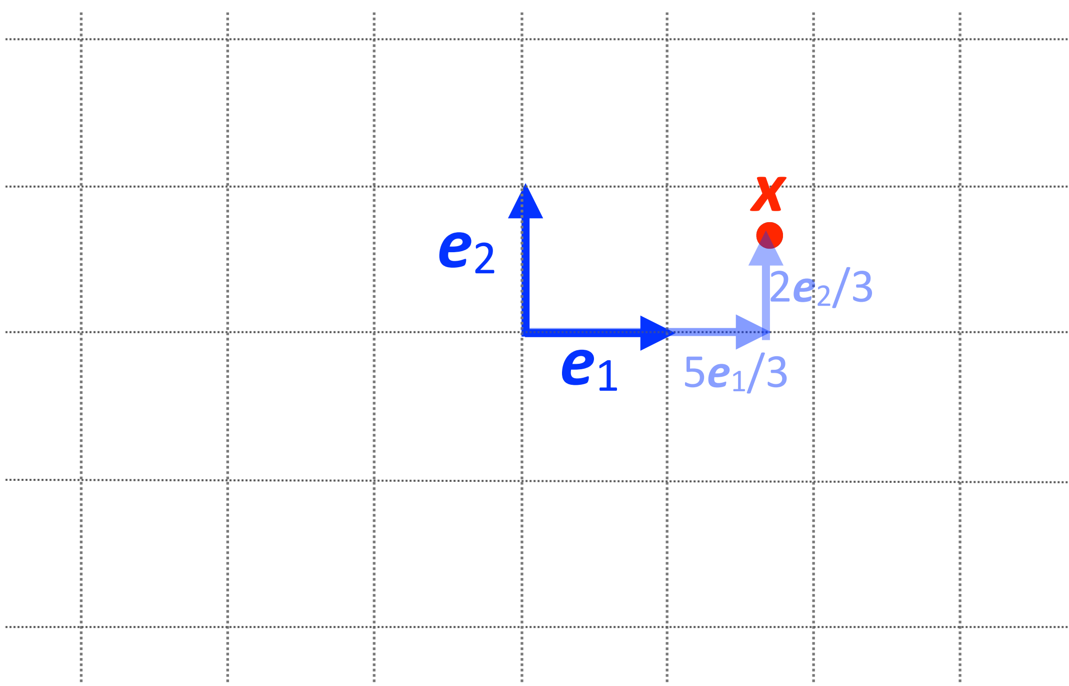


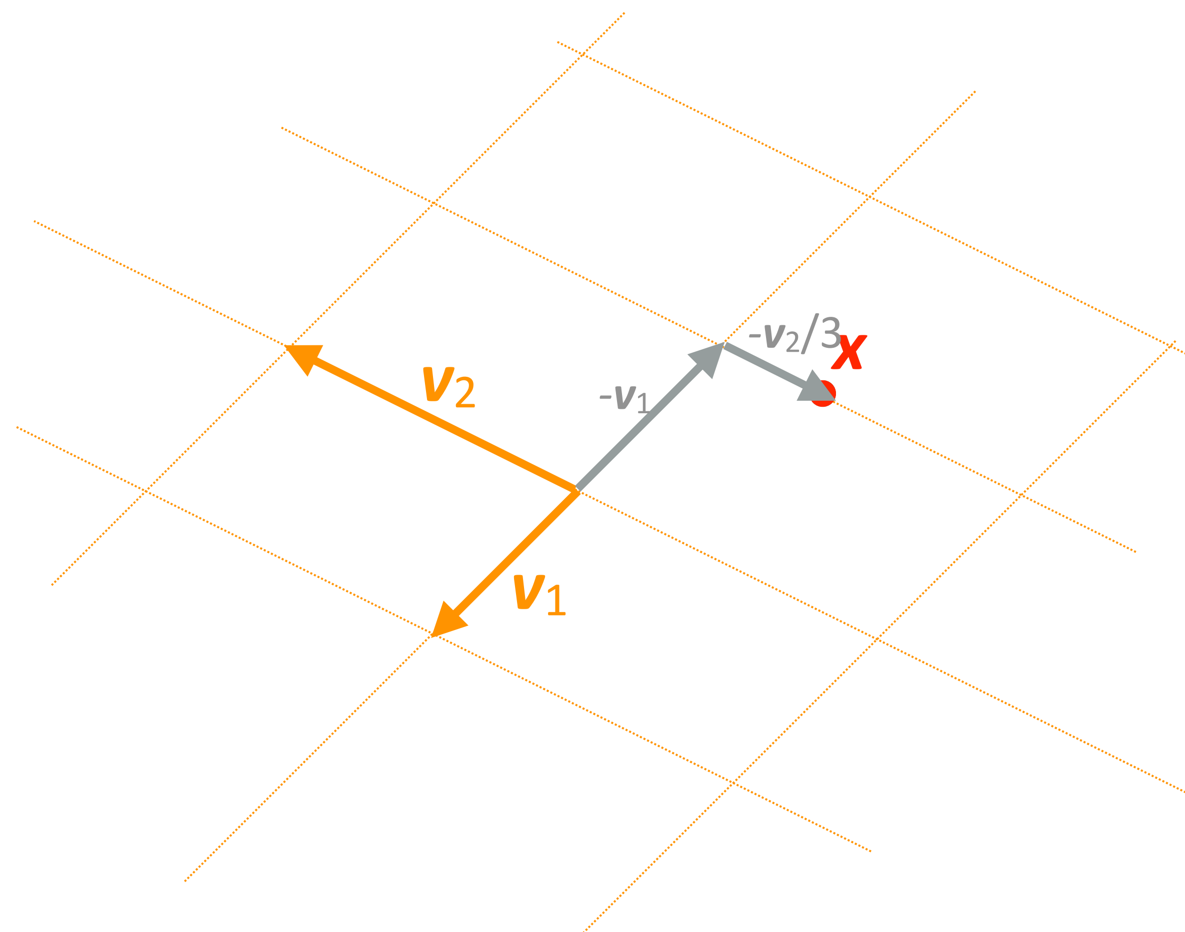
$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Exemple





$$\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{\mathfrak{C}} = x = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 1 & \boxed{2} \end{array}\right)$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 1 & \boxed{2} \end{array}\right)$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

Exemple

Trouver le vecteur de coordonnées de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Trouver la solution de ce système d'équations linéaires

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Changement de base

Soit $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de K^n.

Définition 13.2: La matrice $P_B := (\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n)$ dont les colonnes sont des vecteurs de la base B est appelée *la matrice de changement de base* (de B à la base canonique).

Changement de base

Soit $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de K^n.

Définition 13.2: La matrice $P_B := (\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n)$ dont les colonnes sont des vecteurs de la base B est appelée *la matrice de changement de base* (de B à la base canonique).

Corollaire 13.1: Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de K^n. On a $\mathbf{v} = P_B \cdot [\mathbf{v}]_B$

Changement de base

Soit $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ une base de K^n.

Définition 13.2: La matrice $P_B := (\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n)$ dont les colonnes sont des vecteurs de la base B est appelée *la matrice de changement de base* (de B à la base canonique).

Corollaire 13.1: Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de K^n. On a $\mathbf{v} = P_B \cdot [\mathbf{v}]_B$

Corollaire 13.2: Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de K^n. On a $[\mathbf{v}]_B = P_B^{-1} \cdot \mathbf{v}$

Isomorphisme

Théorème 13.2: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps K. V est isomorphe à K^n. C'est-à-dire, il y a une application linéaire surjective et injective de V à K^n.

Isomorphisme

Théorème 13.2: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps K. V est isomorphe à K^n. C'est-à-dire, il y a une application linéaire surjective et injective de V à K^n.

Démonstration: L'application linéaire est donnée par $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_B$. Consulter le livre pour plus de details. (Page 235-236)

Exemple

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & \boxed{3} \\ 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Colonne non pivot

Exemple

Les polynômes $1+2x^2$, $4+x+5x^2$, $3+2x$, sont-ils linéairement indépendants?

Les vecteurs de coordonnées par rapport à la base canonique $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont indépendants si et seulement si chaque colonne de la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Colonne non pivot

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R}\colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad x = 2, y = 3$$

Exemple

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$. Déterminer si $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ est calculer ses coordonnées par rapport à la base $B := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

$\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \iff \exists x, y \in \mathbb{R} \colon \mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 \iff$ le système

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

admet une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad x = 2, y = 3$$

Changement de base: cas général

Matrice de passage

Matrice de passage

Soient B et T deux bases d'espace vectoriel V sur le corps K. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de V?

Matrice de passage

Soient B et T deux bases d'espace vectoriel V sur le corps K. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de V?

<u>Exemple</u>: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Matrice de passage

Soient B et T deux bases d'espace vectoriel V sur le corps K. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de V?

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $\mathbf{v} = x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3$

Matrice de passage

Soient B et T deux bases d'espace vectoriel V sur le corps K. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de V?

<u>Exemple</u>: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \end{aligned}$

Matrice de passage

Soient B et T deux bases d'espace vectoriel V sur le corps K. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de V?

<u>Exemple</u>: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0\cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0\cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3 \end{aligned}$$

Matrice de passage

Soient *B* et *T* deux bases d'espace vectoriel *V* sur le corps *K*. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de *V*?

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0\cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0\cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3\end{aligned}$$

Donc

Matrice de passage

Soient *B* et *T* deux bases d'espace vectoriel *V* sur le corps *K*. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de *V*?

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0\cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0\cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3 \end{aligned}$$

Donc $[\mathbf{v}]_T = \begin{pmatrix} x + 0\cdot y + z \\ -x + y + 0\cdot z \\ x + 2y - 5z \end{pmatrix}$

Matrice de passage

Soient *B* et *T* deux bases d'espace vectoriel *V* sur le corps *K*. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de *V*?

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0 \cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0 \cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3 \end{aligned}$$

Donc $[\mathbf{v}]_T = \begin{pmatrix} x + 0 \cdot y + z \\ -x + y + 0 \cdot z \\ x + 2y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Matrice de passage

Soient *B* et *T* deux bases d'espace vectoriel *V* sur le corps *K*. Quelle est la relation entre $[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_T$, si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur de *V*?

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Si $[\boldsymbol{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0\cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0\cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3\end{aligned}$$

Donc $[\mathbf{v}]_T = \begin{pmatrix} x + 0\cdot y + z \\ -x + y + 0\cdot z \\ x + 2y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B$

Matrice de passage

Soient *B* et *T* deux bases d'espace vectoriel *V* sur le corps *K*. Quelle est la relation entre $[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_T$, si $\mathbf{v}$ est un vecteur de *V*?

<u>Exemple</u>: On a deux bases $B=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ et $T=\{\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3,\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3,\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3$$

Si $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors
$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + z\mathbf{b}_3 \\ &= x(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) + y(\mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3) + z(\mathbf{t}_1 - 5\mathbf{t}_3) \\ &= (x + 0\cdot y + z)\mathbf{t}_1 + (-x + y + 0\cdot z)\mathbf{t}_2 + (x + 2y - 5z)\mathbf{t}_3\end{aligned}$$

Donc $\boxed{[\mathbf{v}]_T} = \begin{pmatrix} x + 0\cdot y + z \\ -x + y + 0\cdot z \\ x + 2y - 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B}$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow \ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot [\mathbf{v}]_B = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B$$

Matrice de passage

<u>Exemple</u>: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{\boxed{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ \mathbf{v} \text{ selon Note 13.1}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{\boxed{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ \mathbf{v} \text{ selon Note 13.1}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B$$

$$\Longrightarrow$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{\boxed{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ \mathbf{v}\text{ selon Note 13.1}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ [\mathbf{v}]_T\text{ selon Note 13.1}}$$

$$\Longrightarrow$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\boxed{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ \mathbf{v}\ \text{selon Note 13.1}} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B}}_{=\ [\mathbf{v}]_T\ \text{selon Note 13.1}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [\mathbf{v}]_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot [\mathbf{v}]_B$$

Matrice de passage

Exemple: On a deux bases $B=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ et $T=\{\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3\}$ d'un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{t}_2 + 2\boldsymbol{t}_3,\ \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{t}_1 - 5\boldsymbol{t}_3$$

$$\Longrightarrow\ (\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3) = (\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\ \underbrace{\boxed{(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)\cdot[\mathbf{v}]_B}}_{=\ \mathbf{v}\text{ selon Note 13.1}} = (\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3)\cdot\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot[\mathbf{v}]_B}}_{=\ [\mathbf{v}]_T\text{ selon Note 13.1}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ [\mathbf{v}]_T = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}}\cdot[\mathbf{v}]_B$$

Matrice de passage de la base *B* à la base *T*

Matrice de passage

Définition 13.2: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, et soient B et T deux bases de V. Il existe une matrice inversible, notée par $P_{B\to T}$, et appelé *la matrice de passage* de B à T, telle que pour chaque $\boldsymbol{v}$ de V on a $[\boldsymbol{v}]_T = P_{B\to T}[\boldsymbol{v}]_B$.

$P^{-1}_{B\to T}$

Matrice de passage

<u>Définition 13.2</u>: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, et soient B et T deux bases de V. Il existe une matrice inversible, notée par $P_{B\to T}$, et appelé <u>*la matrice de passage*</u> de B à T, telle que pour chaque $\boldsymbol{v}$ de V on a $[\boldsymbol{v}]_T = P_{B\to T}[\boldsymbol{v}]_B$.

<u>Corollaire 13.23</u>: La matrice de passage de T à B est égale à $P_{B\to T}^{-1}$

Matrice de passage

Définition 13.2: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, et soient B et T deux bases de V. Il existe une matrice inversible, notée par $P_{B\to T}$, et appelé *la matrice de passage* de B à T, telle que pour chaque $\boldsymbol{v}$ de V on a $[\boldsymbol{v}]_T = P_{B\to T}[\boldsymbol{v}]_B$.

Corollaire 13.23: La matrice de passage de T à B est égale à $P_{B\to T}^{-1}$

$$[\mathbf{v}]_T = P_{B\to T}[\mathbf{v}]_B$$

Matrice de passage

Définition 13.2: Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps K, et soient B et T deux bases de V. Il existe une matrice inversible, notée par $P_{B\to T}$, et appelé *la matrice de passage* de B à T, telle que pour chaque $\boldsymbol{v}$ de V on a $[\boldsymbol{v}]_T = P_{B\to T}[\boldsymbol{v}]_B$.

Corollaire 13.23: La matrice de passage de T à B est égale à $P_{B\to T}^{-1}$

$$[\mathbf{v}]_T = P_{B\to T}[\mathbf{v}]_B \implies P_{B\to T}^{-1}[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{v}]_B$$

Comment la trouver?

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice resultante est la matrice de passage.

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \quad P_{B \to T}$$

La matrice resultante est la matrice de passage.

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n) \cdot \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \quad P_{B \to T}$$

La matrice resultante est la matrice de passage.

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\boldsymbol{v}]_C = P_B\,[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_C = P_T\,[\boldsymbol{v}]_T$ alors

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\boldsymbol{v}]_C = P_B\,[\boldsymbol{v}]_B$ et $[\boldsymbol{v}]_C = P_T\,[\boldsymbol{v}]_T$ alors

$$P_{B\to T}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = P_T^{-1}P_B[\mathbf{v}]_B$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\, [\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\, [\mathbf{v}]_T$ alors

$$P_{B\to T}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = P_T^{-1}P_B[\mathbf{v}]_B$$

selon Définition 13.2

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base B par rapport aux vecteurs de la base T.

Mais comment?

Soit C la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B \underset{\text{selon Définition 13.2}}{=} [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B \underset{\uparrow}{=} [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice [$\boldsymbol{t}_1$ $\boldsymbol{t}_2$ …. $\boldsymbol{t}_n$ | $\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{b}_2$ … $\boldsymbol{b}_n$] dans la forme échelonnée réduite

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice $[\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2\ \dots .\ \boldsymbol{t}_n \mid \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \dots\ \boldsymbol{b}_n]$ dans la forme échelonnée réduite

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \implies \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice [$\boldsymbol{t}_1$ $\boldsymbol{t}_2$ .... $\boldsymbol{t}_n$ | $\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{b}_2$ ... $\boldsymbol{b}_n$] dans la forme échelonnée réduite

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (P_T|P_B)$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice [$\boldsymbol{t}_1$ $\boldsymbol{t}_2$ .... $\boldsymbol{t}_n$ | $\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{b}_2$ ... $\boldsymbol{b}_n$] dans la forme échelonnée réduite

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (P_T|P_B) \sim (I_n \mid P_T^{-1}P_B)$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice $[\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2\ \ldots.\ \boldsymbol{t}_n \mid \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \ldots\ \boldsymbol{b}_n]$ dans la forme échelonnée réduite

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (P_T|P_B) \sim (I_n \mid P_T^{-1}P_B) = (I_n \mid P_{B\to T})$$

Comment la trouver?

Ecrire les vecteurs de la base *B* par rapport aux vecteurs de la base *T*.

Mais comment?

Soit *C* la base canonique de K^n.

Selon Définition 13.1 on a $[\mathbf{v}]_C = P_B\,[\mathbf{v}]_B$ et $[\mathbf{v}]_C = P_T\,[\mathbf{v}]_T$ alors

$$\boxed{P_{B\to T}}[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_T = P_T^{-1}[\mathbf{v}]_C = \boxed{P_T^{-1}P_B}[\mathbf{v}]_B \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P_{B\to T} = P_T^{-1}P_B}$$

selon Définition 13.2

Transformer la matrice [$\boldsymbol{t}_1$ $\boldsymbol{t}_2$ .... $\boldsymbol{t}_n$ | $\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{b}_2$ ... $\boldsymbol{b}_n$] dans la forme échelonnée réduite

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n \mid \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = (P_T | P_B) \sim (I_n \mid P_T^{-1}P_B) = (I_n \mid \boxed{P_{B\to T}})$$

La matrice résultante à droite est la matrice de passage.

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de T à B

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & -7 & -5 \\ -3 & 4 & 9 & 7 \end{array} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

Base *B*

$$\left(\boxed{\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{array}} \,\middle|\, \begin{array}{rr} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{array} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\begin{array}{cc} \text{Base } B & \text{Base } T \\ \end{array}$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}} \;\middle\|\; \boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

Base *B* Base *T*

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}} \middle\| \boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\begin{array}{cc} \text{Base } B & \text{Base } T \end{array}$$

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}} \middle\| \boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

Base *B* Base *T*

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}} \middle\| \boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}_{\text{Base } B} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}^{P_{T \to B}} \right)$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}_{P_{T \to B}} \right)$$

Determiner la matrice de passage de *B* à *T*

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}_{P_{T \to B}} \end{array} \right)$$

Determiner la matrice de passage de *B* à *T*

$$P_{B \to T} = P_{T \to B}^{-1} =$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle\| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}_{P_{T\to B}} \right)$$

Determiner la matrice de passage de *B* à *T*

$$P_{B\to T} = P_{T\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle\| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}^{P_{T\to B}} \\ 0 & 1 & \end{array} \right)$$

Determiner la matrice de passage de *B* à *T*

$$P_{B\to T} = P_{T\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4\times 5 - 3\times 6} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de *T* à *B*

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle\| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}_{P_{T \to B}} \end{array} \right)$$

Determiner la matrice de passage de *B* à *T*

$$P_{B \to T} = P_{T \to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 \times 5 - 3 \times 6} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Determiner la matrice de passage de T à B

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{matrix}}}_{\text{Base } B} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} -7 & -5 \\ 9 & 7 \end{matrix}}}_{\text{Base } T} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{matrix}}}_{P_{T \to B}} \right)$$

Determiner la matrice de passage de B à T

$$P_{B \to T} = P_{T \to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 \times 5 - 3 \times 6} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{matrix}} \right)$$