

# Calcul matriciel



# La dernière fois

---

# La dernière fois

---

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  Espace vectoriel des toutes les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$  par rapport à l'addition et la multiplication définie la dernière fois

# La dernière fois

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  Espace vectoriel des toutes les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$  par rapport à l'addition et la multiplication définie la dernière fois

Chacun des éléments de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a une matrice canoniquement associée. Cette matrice est du format  $m \times n$ .

# La dernière fois

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  Espace vectoriel des toutes les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$  par rapport à l'addition et la multiplication définie la dernière fois

Chacun des éléments de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a une matrice canoniquement associée. Cette matrice est du format  $m \times n$ .

La matrice  $A$  canoniquement associée à  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  vérifie

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$$

# La dernière fois

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  Espace vectoriel des toutes les applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$  par rapport à l'addition et la multiplication définie la dernière fois

Chacun des éléments de  $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a une matrice canoniquement associée. Cette matrice est du format  $m \times n$ .

La matrice  $A$  canoniquement associée à  $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  vérifie

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$

où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$


$\mathbb{R}^{m \times n}$

---

$\mathbb{R}^{m \times n}$

---

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$\mathbb{R}^{m \times n}$

---

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Espace de toutes les applications  
linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^{m \times n}$

---

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$



$\mathbb{R}^{m \times n}$

Espace de toutes les applications  
linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^{m \times n}$

---

$\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Espace de toutes les applications  
linéaires de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^m$



$\mathbb{R}^{m \times n}$

Espace de toutes les matrices  
réelles du format  $m \times n$

# Composition d'applications linéaires

---

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

# Composition d'applications linéaires

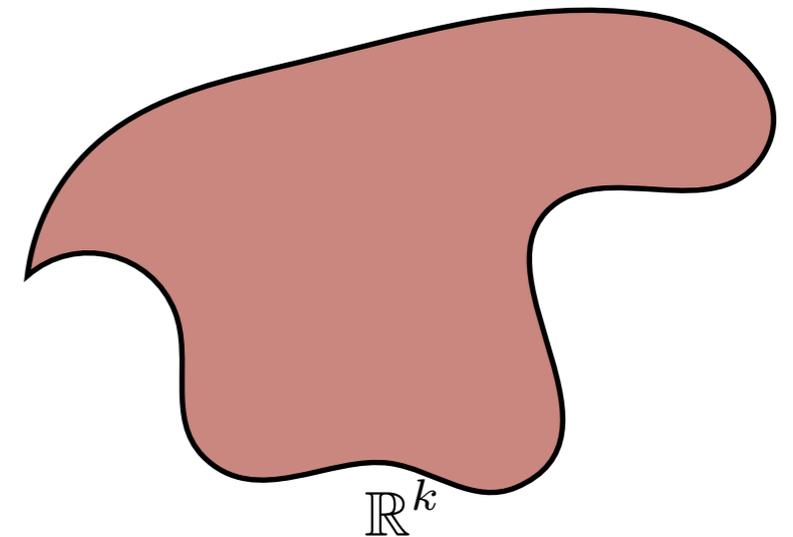
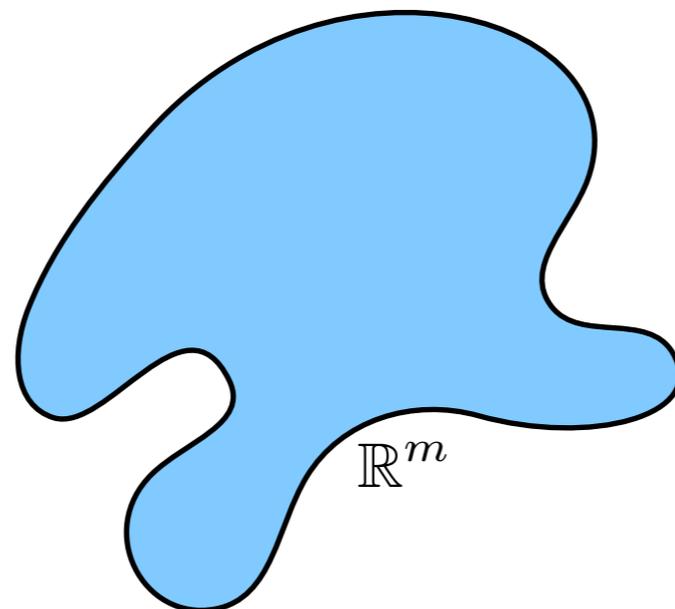
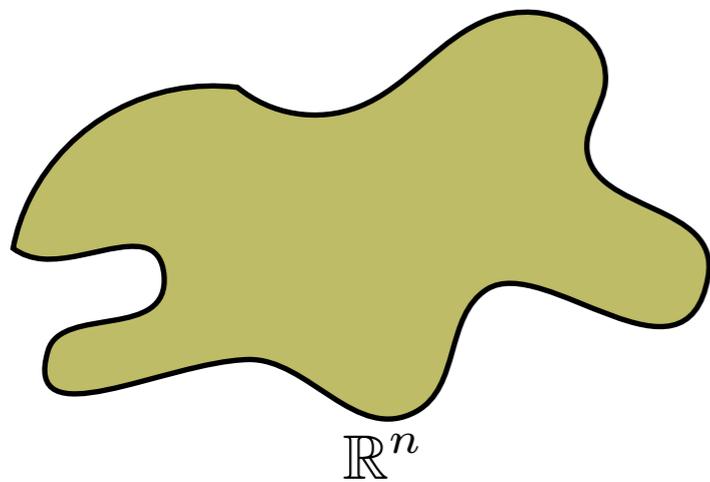
$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

La composition de  $f$  et  $g$ , notée par  $g \circ f$  est l'application de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^k$  définie par  
 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$

# Composition d'applications linéaires

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

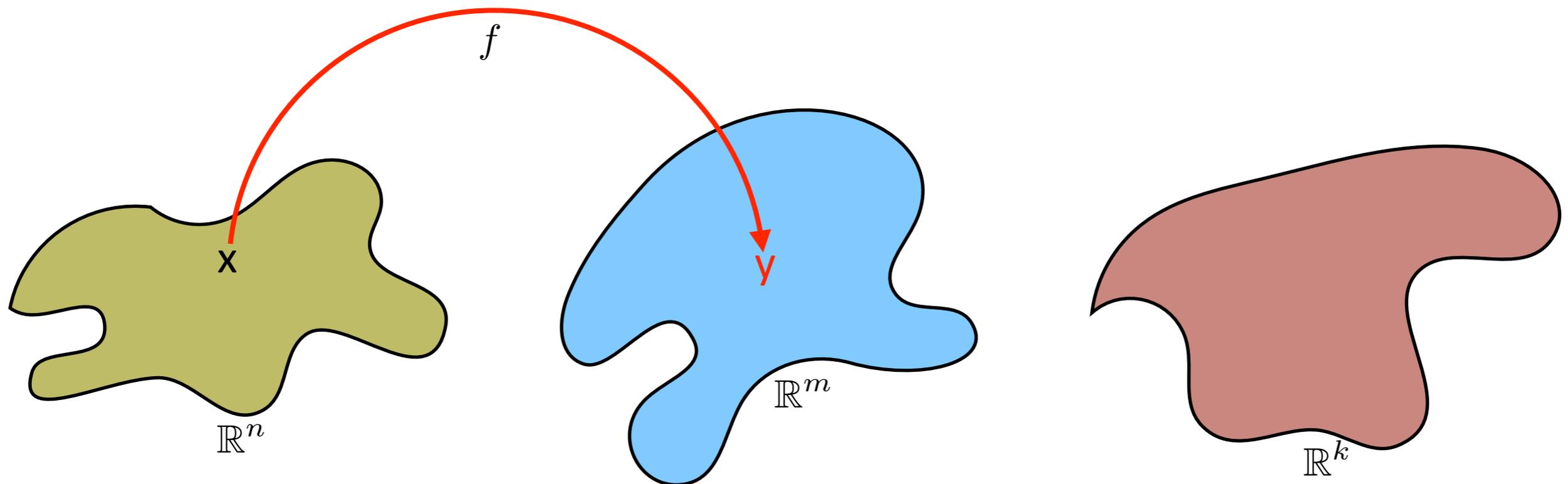
La composition de  $f$  et  $g$ , notée par  $g \circ f$  est l'application de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^k$  définie par  
 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$



# Composition d'applications linéaires

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

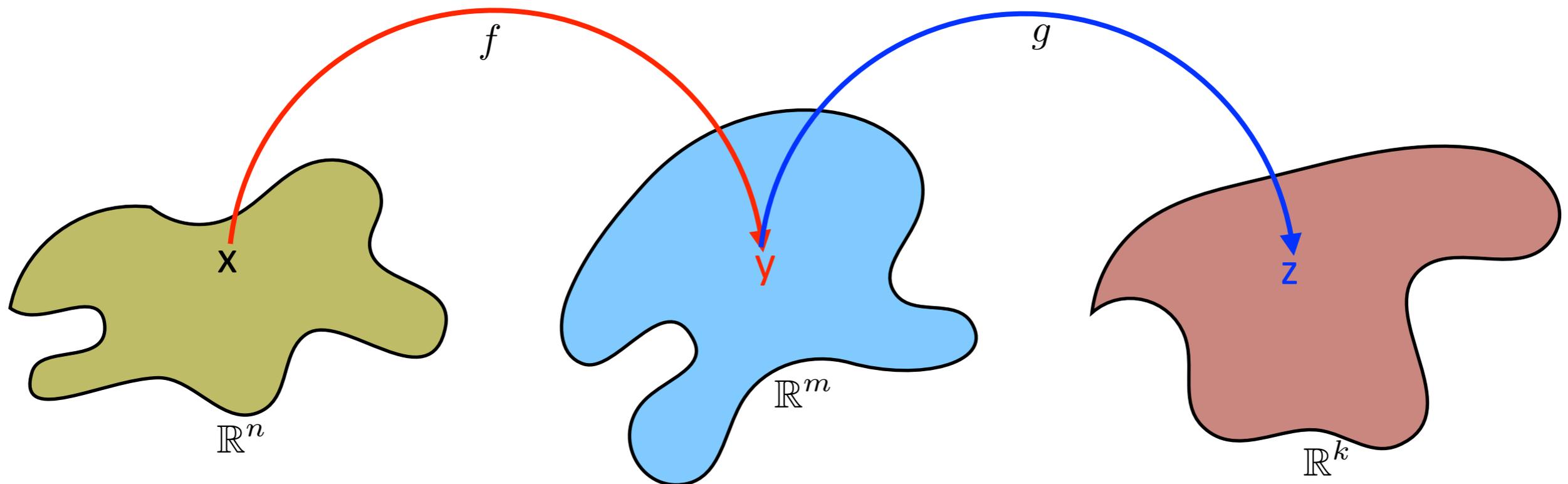
La composition de  $f$  et  $g$ , notée par  $g \circ f$  est l'application de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^k$  définie par  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$



# Composition d'applications linéaires

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

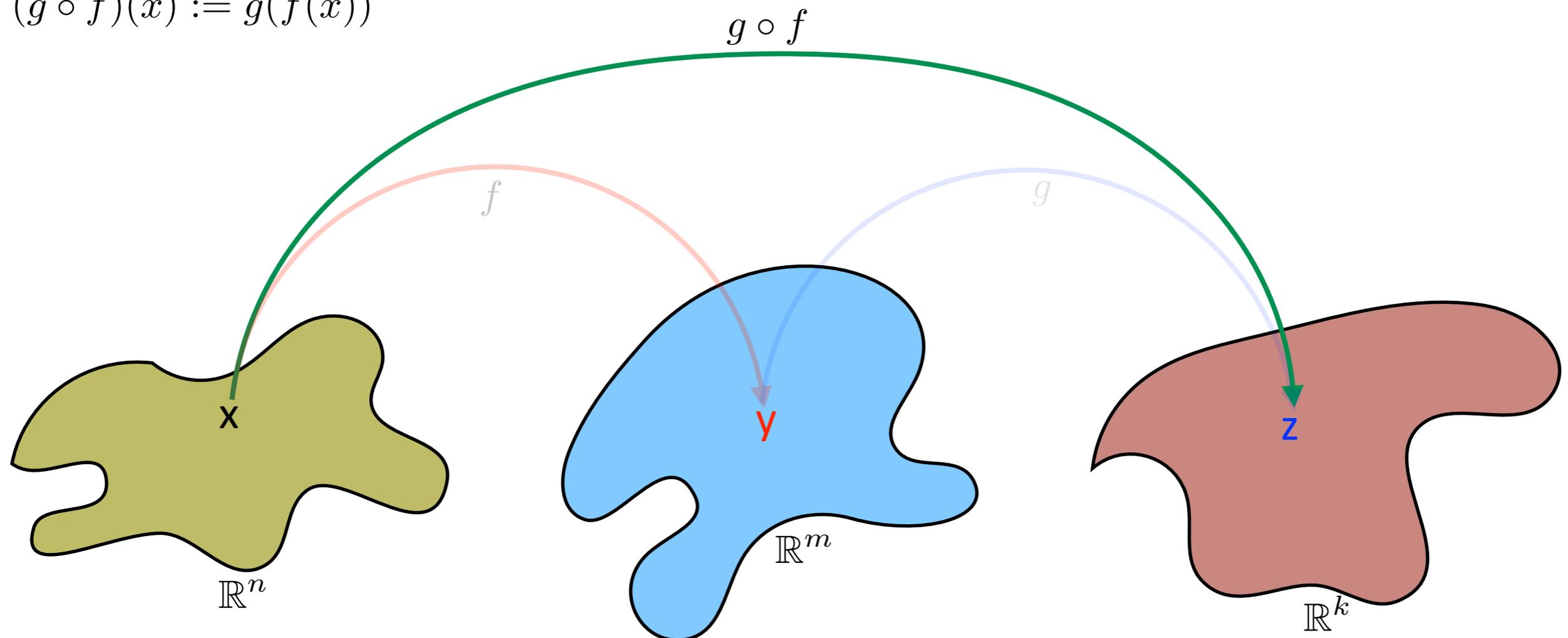
La composition de  $f$  et  $g$ , notée par  $g \circ f$  est l'application de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^k$  définie par  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$



# Composition d'applications linéaires

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$$

La composition de  $f$  et  $g$ , notée par  $g \circ f$  est l'application de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^k$  définie par  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$



# Linéarité

---

# Linéarité

---

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des  
mathématiciens!

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des  
mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y)$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = g(f(x + y))$$

Définition de la composition

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) && \text{Définition de la composition} \\ &= g(f(x) + f(y)) && \text{Linéarité de } f\end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) && \text{Définition de la composition} \\ &= g(f(x) + f(y)) && \text{Linéarité de } f \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) && \text{Linéarité de } g\end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) && \text{Définition de la composition} \\ &= g(f(x) + f(y)) && \text{Linéarité de } f \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) && \text{Linéarité de } g \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) && \text{Définition de la composition}\end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des  
mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

$$(g \circ f)(cx) = c(g \circ f)(x)$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

$$(g \circ f)(cx) = g(f(cx))$$

Définition de la composition

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \text{ La langue des mathématiciens!}$$

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

$$\begin{aligned} (g \circ f)(cx) &= g(f(cx)) \text{ Définition de la composition} \\ &= g(cf(x)) \text{ Linéarité de } f \end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \text{ La langue des mathématiciens!}$$

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

$$\begin{aligned} (g \circ f)(cx) &= g(f(cx)) \text{ Définition de la composition} \\ &= g(cf(x)) \text{ Linéarité de } f \\ &= cg(f(x)) \text{ Linéarité de } g \end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \text{ La langue des mathématiciens!}$$

Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

$$\begin{aligned} (g \circ f)(cx) &= g(f(cx)) \text{ Définition de la composition} \\ &= g(cf(x)) \text{ Linéarité de } f \\ &= cg(f(x)) \text{ Linéarité de } g \\ &= c(g \circ f)(x) \\ &\text{ Définition de la composition} \end{aligned}$$

# Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont linéaires, alors  $g \circ f$  est aussi linéaire.

$$f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k) \implies (g \circ f) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

La langue des mathématiciens!

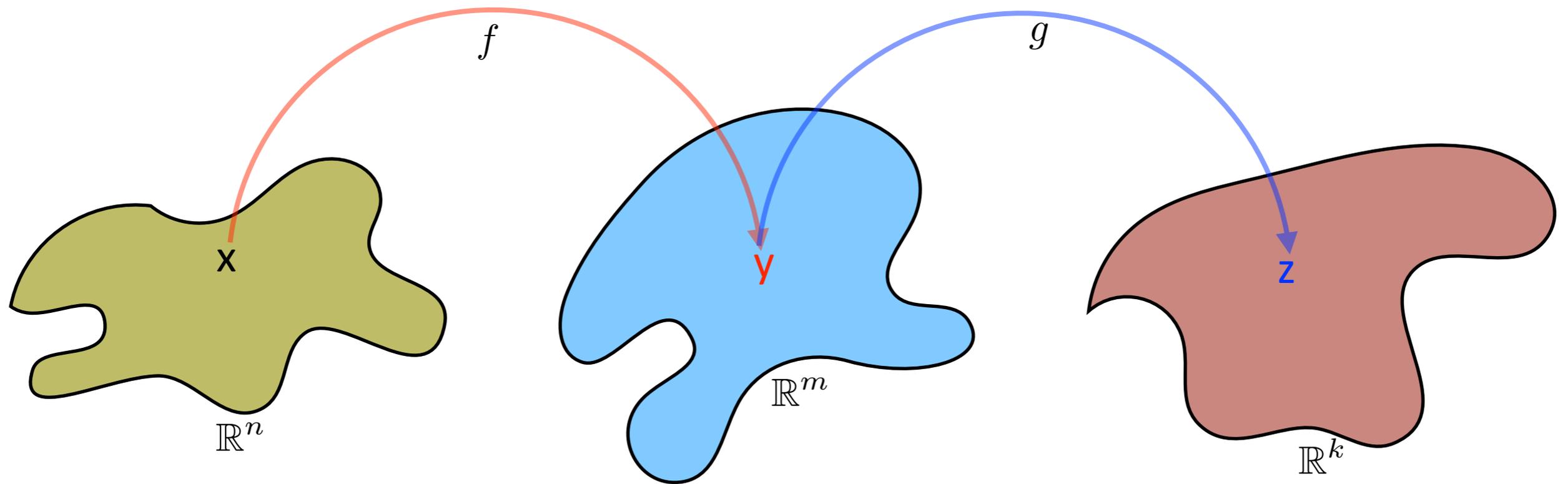
Linéarité par rapport à l'addition

$$(g \circ f)(x + y) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$$

Linéarité par rapport à la multiplication scalaire

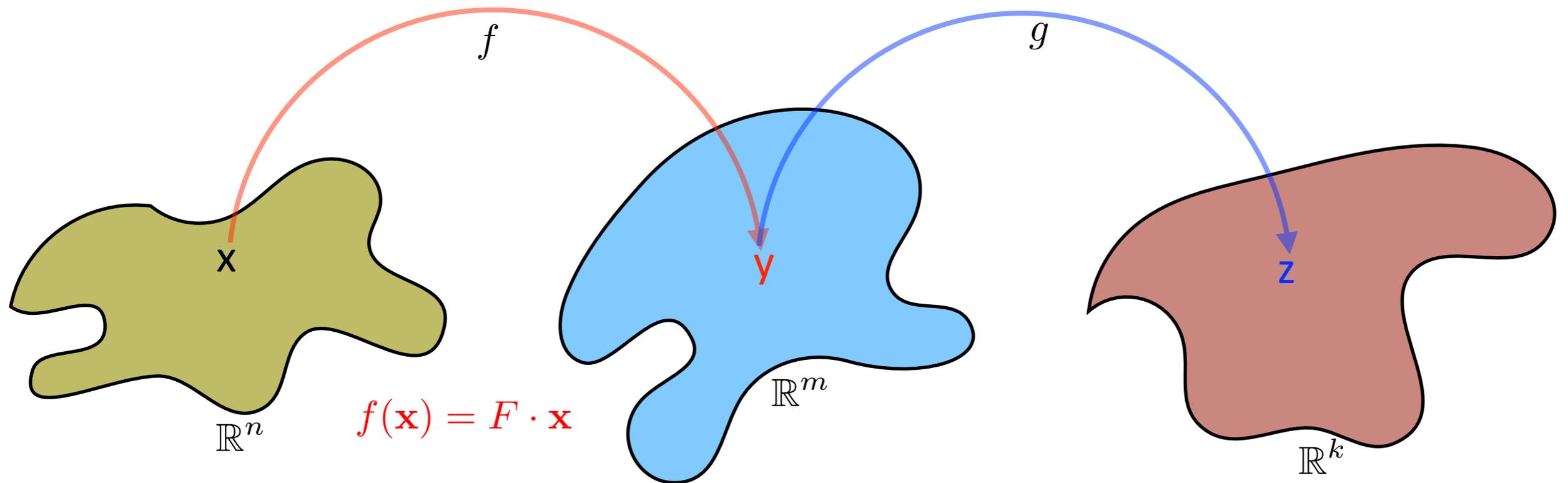
$$(g \circ f)(cx) = c(g \circ f)(x)$$

# Matrice associée

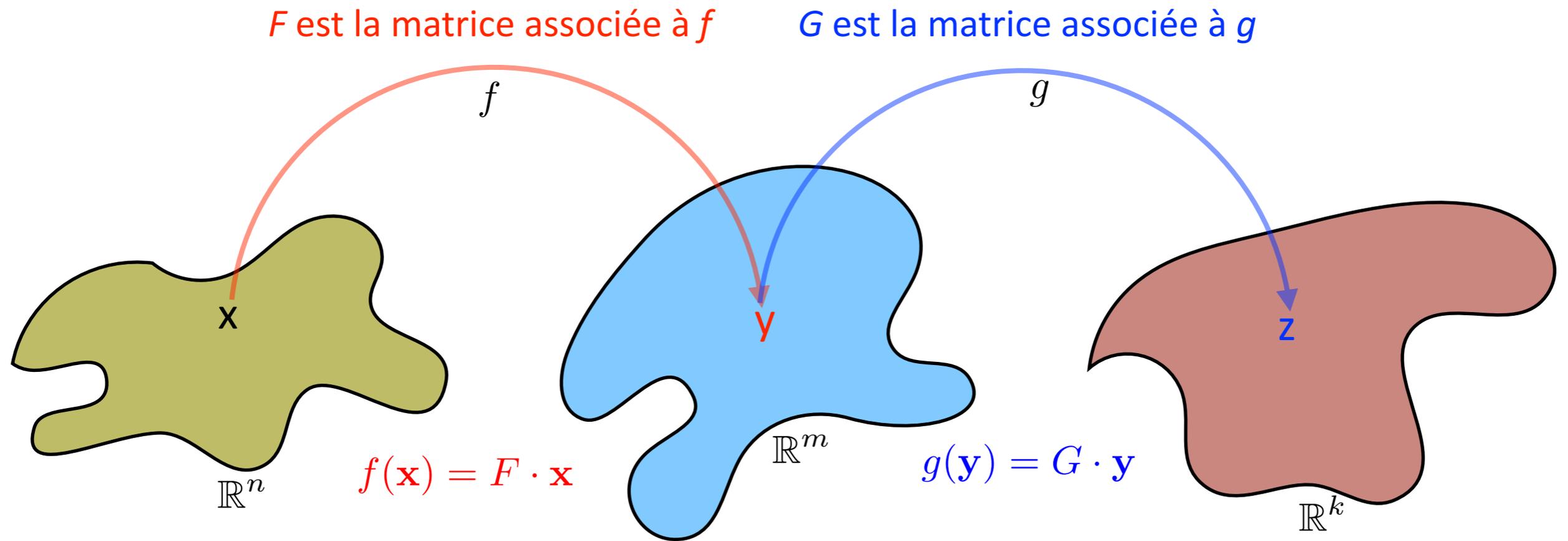


# Matrice associée

$F$  est la matrice associée à  $f$



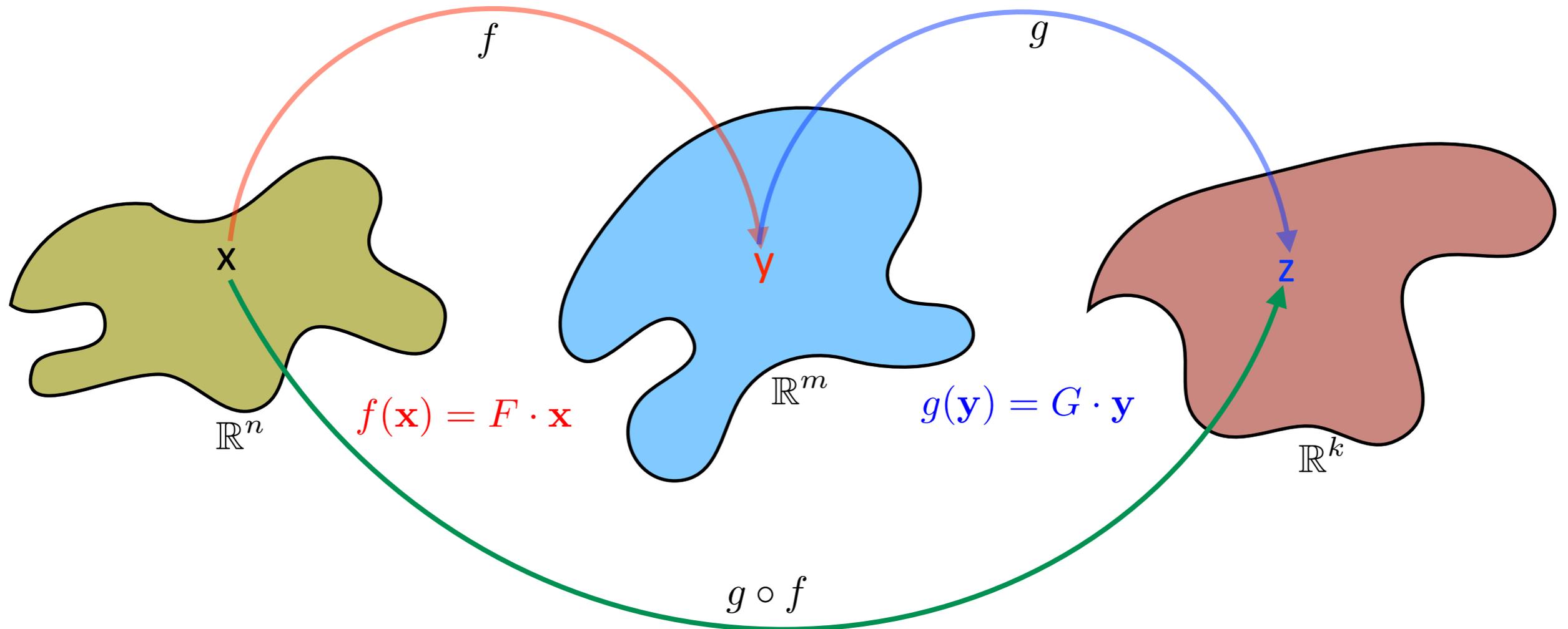
# Matrice associée



# Matrice associée

$F$  est la matrice associée à  $f$

$G$  est la matrice associée à  $g$



$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = H \cdot \mathbf{x}, \quad H = ?$$

Comment calculer la matrice associée à  $g \circ f$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$   
par rapport à  $F$  et  $G$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$   
par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$   
où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$   
par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$   
où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition de la composition  $= g(f(\mathbf{e}_1)), g(f(\mathbf{e}_2)), \dots, g(f(\mathbf{e}_n))$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$  par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition de la composition =  $g(f(\mathbf{e}_1)), g(f(\mathbf{e}_2)), \dots, g(f(\mathbf{e}_n))$

Définition de la matrice associée =  $G \cdot f(\mathbf{e}_1), G \cdot f(\mathbf{e}_2), \dots, G \cdot f(\mathbf{e}_n)$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$  par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition de la composition =  $g(f(\mathbf{e}_1)), g(f(\mathbf{e}_2)), \dots, g(f(\mathbf{e}_n))$

Définition de la matrice associée =  $G \cdot f(\mathbf{e}_1), G \cdot f(\mathbf{e}_2), \dots, G \cdot f(\mathbf{e}_n)$

première  
colonne de  $F$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$  par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition de la composition =  $g(f(\mathbf{e}_1)), g(f(\mathbf{e}_2)), \dots, g(f(\mathbf{e}_n))$

Définition de la matrice associée =  $G \cdot f(\mathbf{e}_1), G \cdot f(\mathbf{e}_2), \dots, G \cdot f(\mathbf{e}_n)$

première  
colonne de  $F$

deuxième  
colonne de  $F$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$  par rapport à  $F$  et  $G$

Les colonnes de  $H$  sont  $(g \circ f)(\mathbf{e}_1), (g \circ f)(\mathbf{e}_2), \dots, (g \circ f)(\mathbf{e}_n)$

Les colonnes de la matrice associée à  $f$  sont des vecteurs  $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  où

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition de la composition =  $g(f(\mathbf{e}_1)), g(f(\mathbf{e}_2)), \dots, g(f(\mathbf{e}_n))$

Définition de la matrice associée =  $G \cdot f(\mathbf{e}_1), G \cdot f(\mathbf{e}_2), \dots, G \cdot f(\mathbf{e}_n)$

première colonne de  $F$ 
deuxième colonne de  $F$ 
Colonne  $n$  de  $F$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$   
par rapport à  $F$  et  $G$

# Matrice associée

Application	$f$	$g$	$g \circ f$
Matrice associée	$F$	$G$	$H$

Trouver une description de  $H$   
par rapport à  $F$  et  $G$

$H = (G \cdot F_1 \quad G \cdot F_2 \quad \cdots \quad G \cdot F_n)$  où  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont des colonnes de  $F$

# Multiplication matricielle

---

# Multiplication matricielle

---

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

# Multiplication matricielle

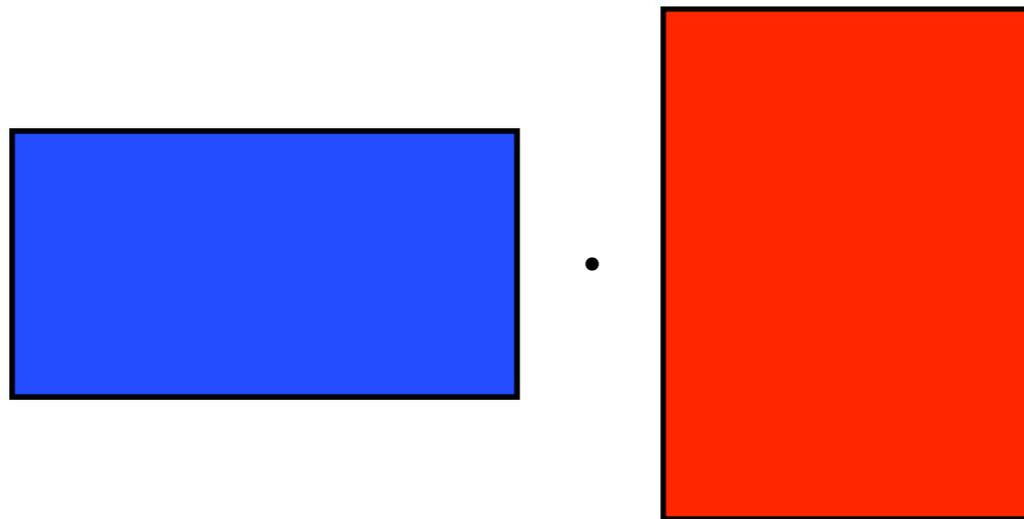
Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k)$$

# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

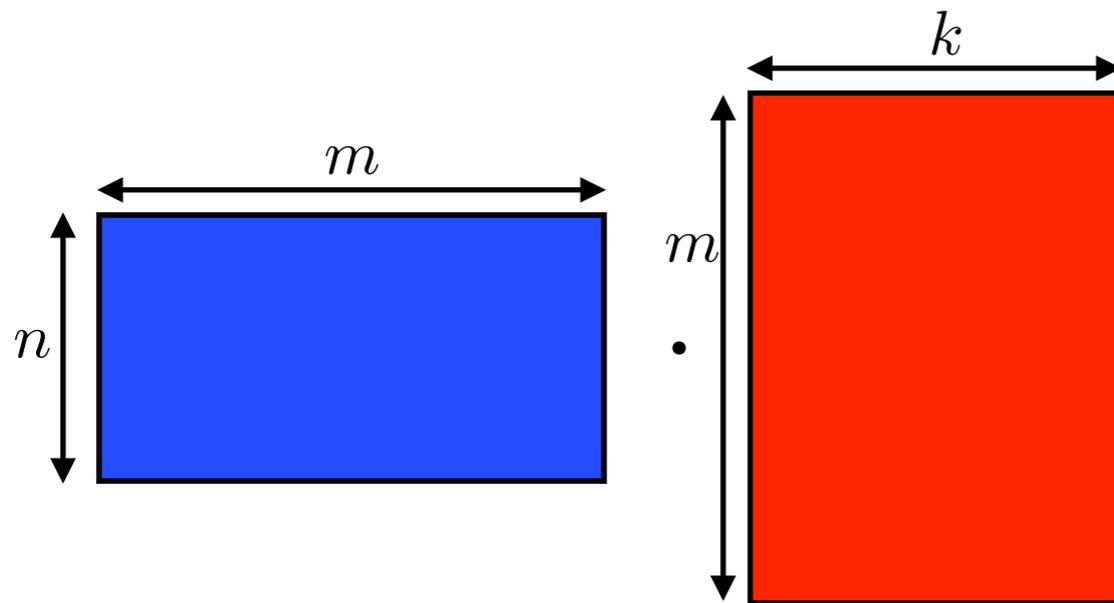
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

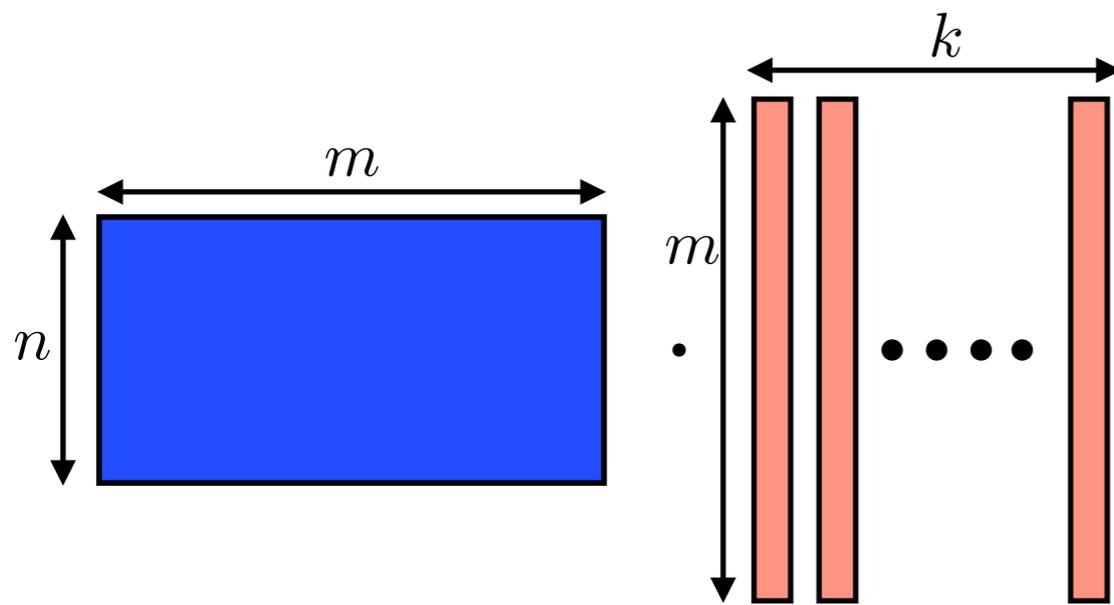
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

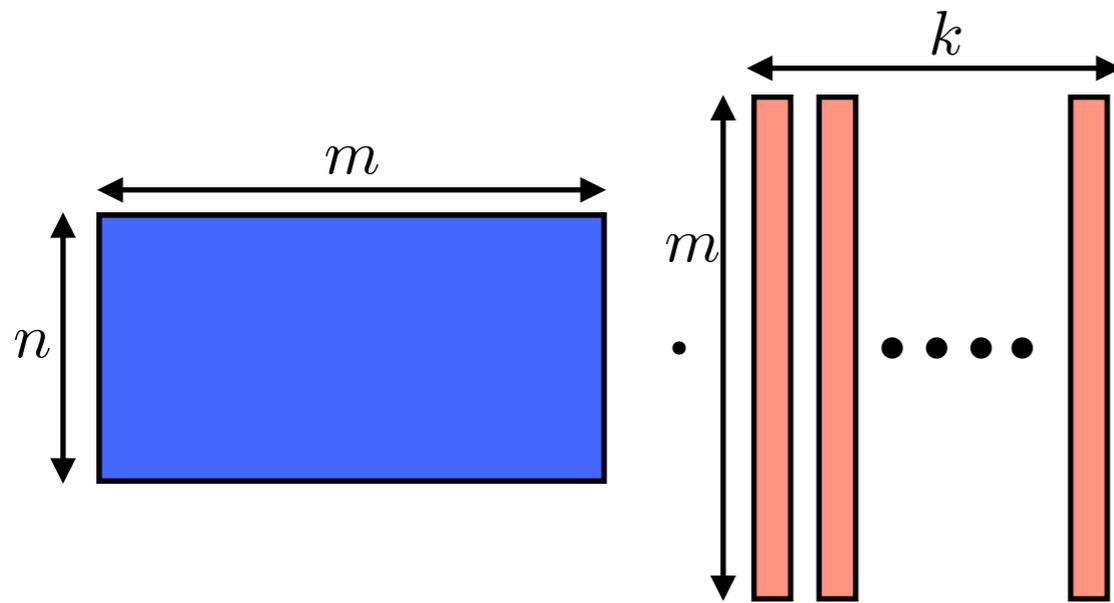
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

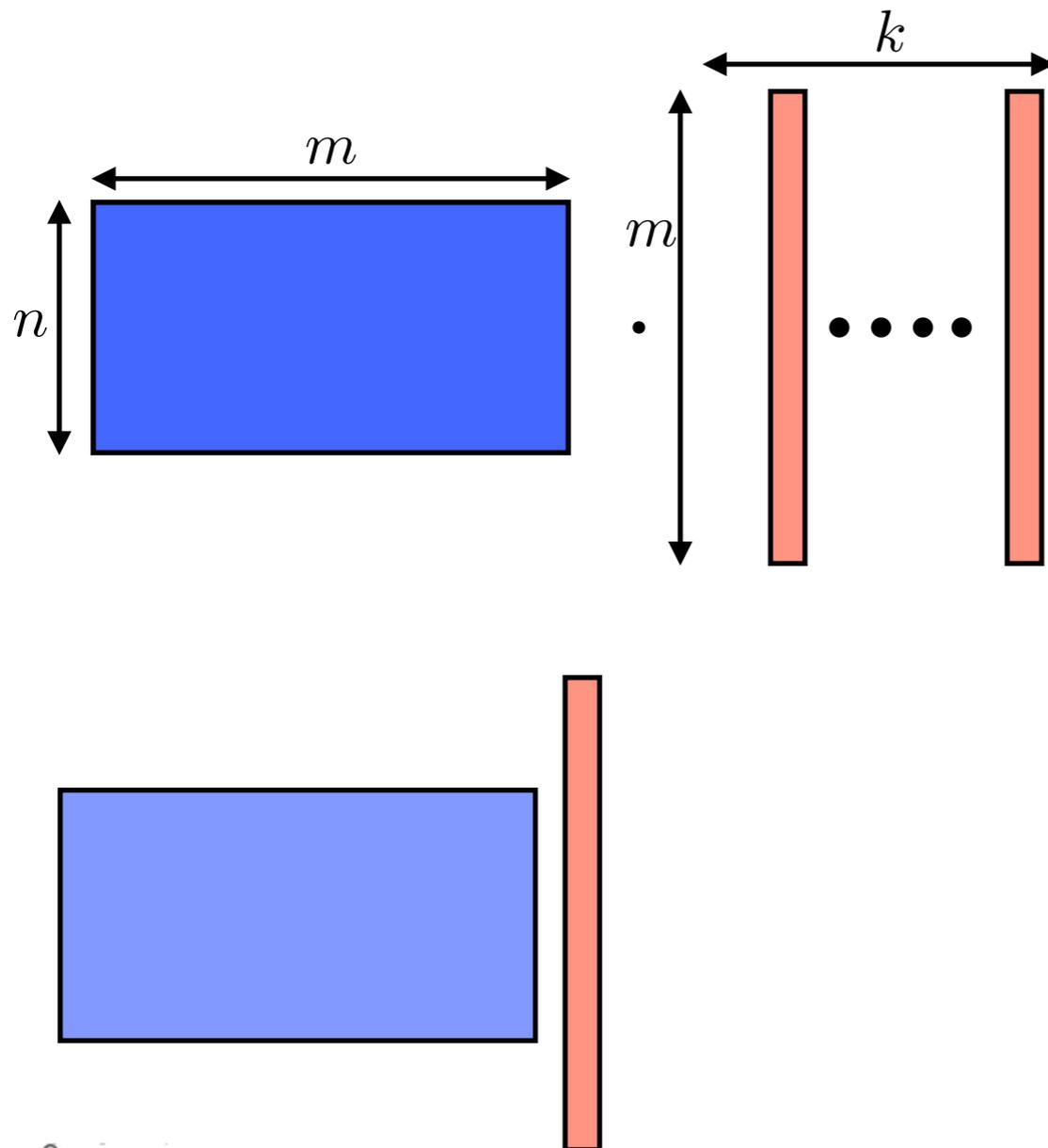
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

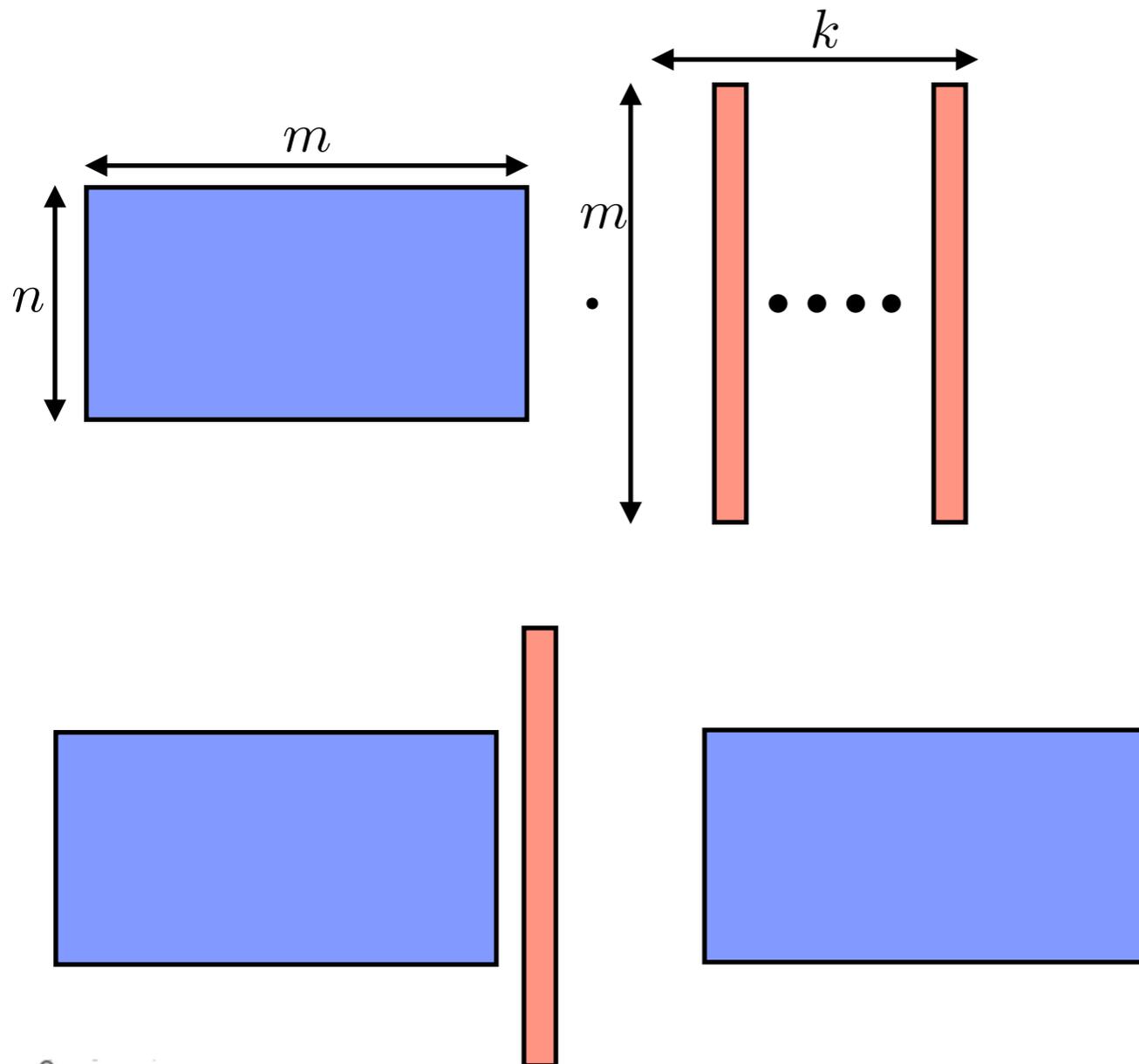
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

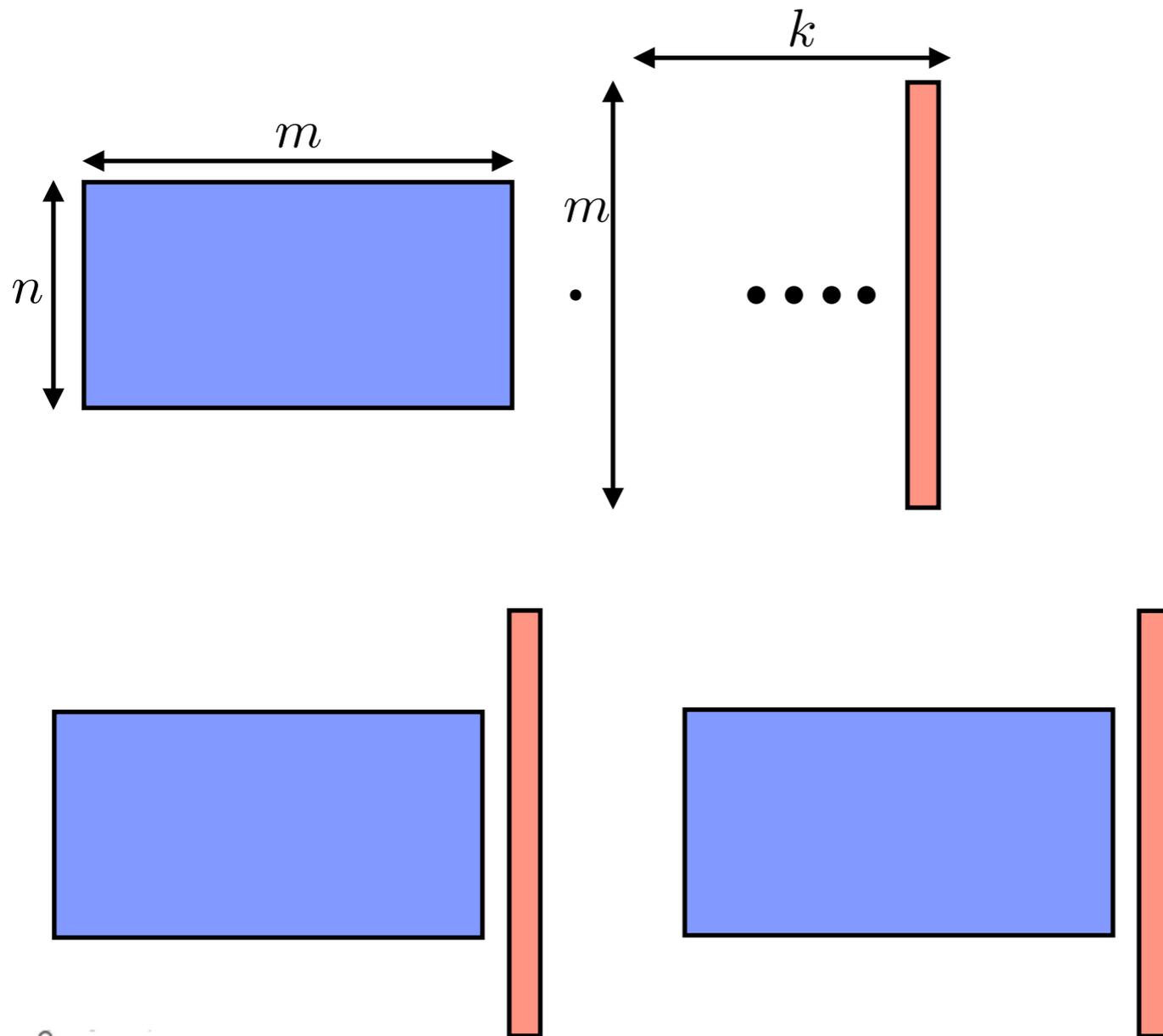
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

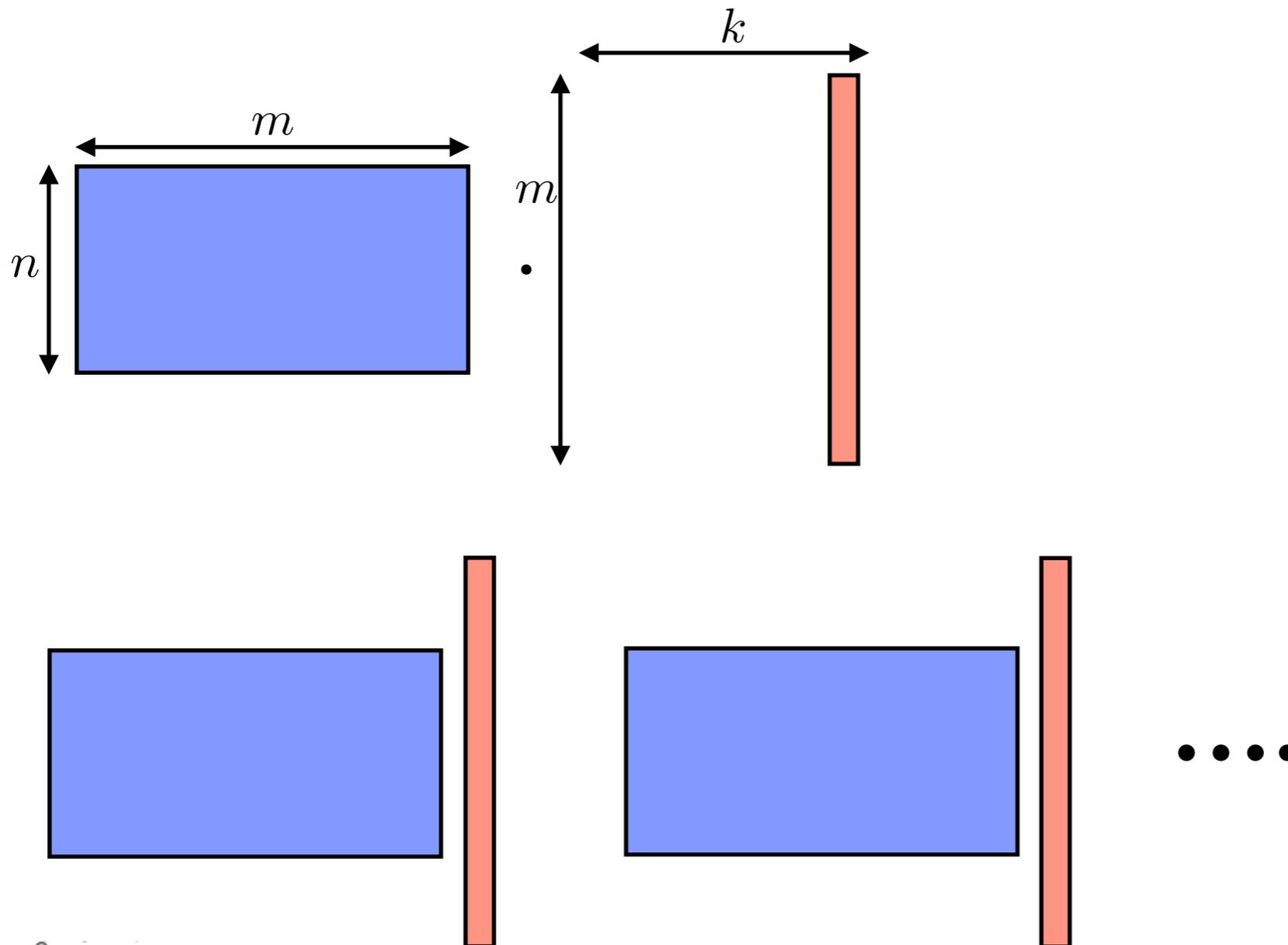
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

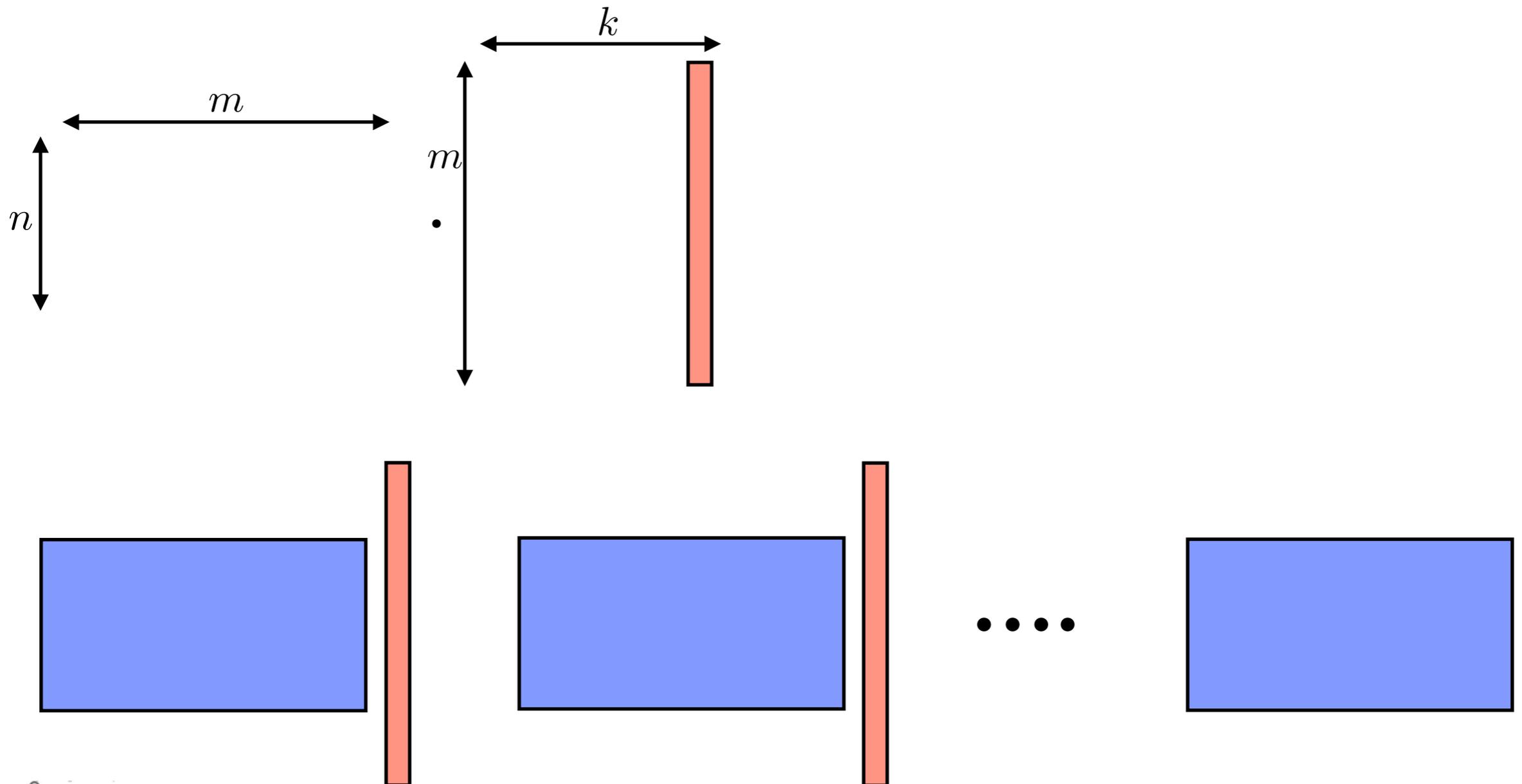
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

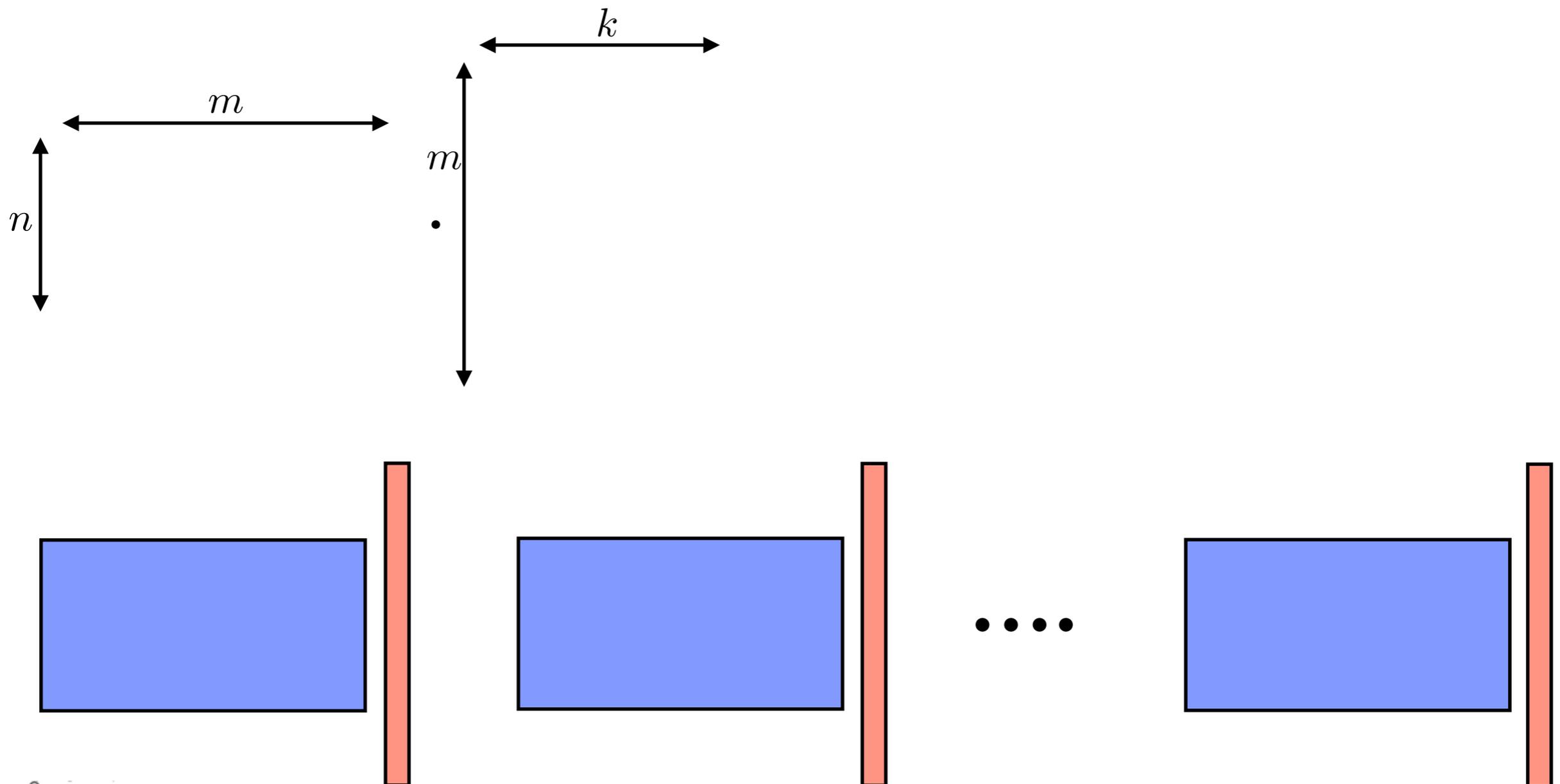
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

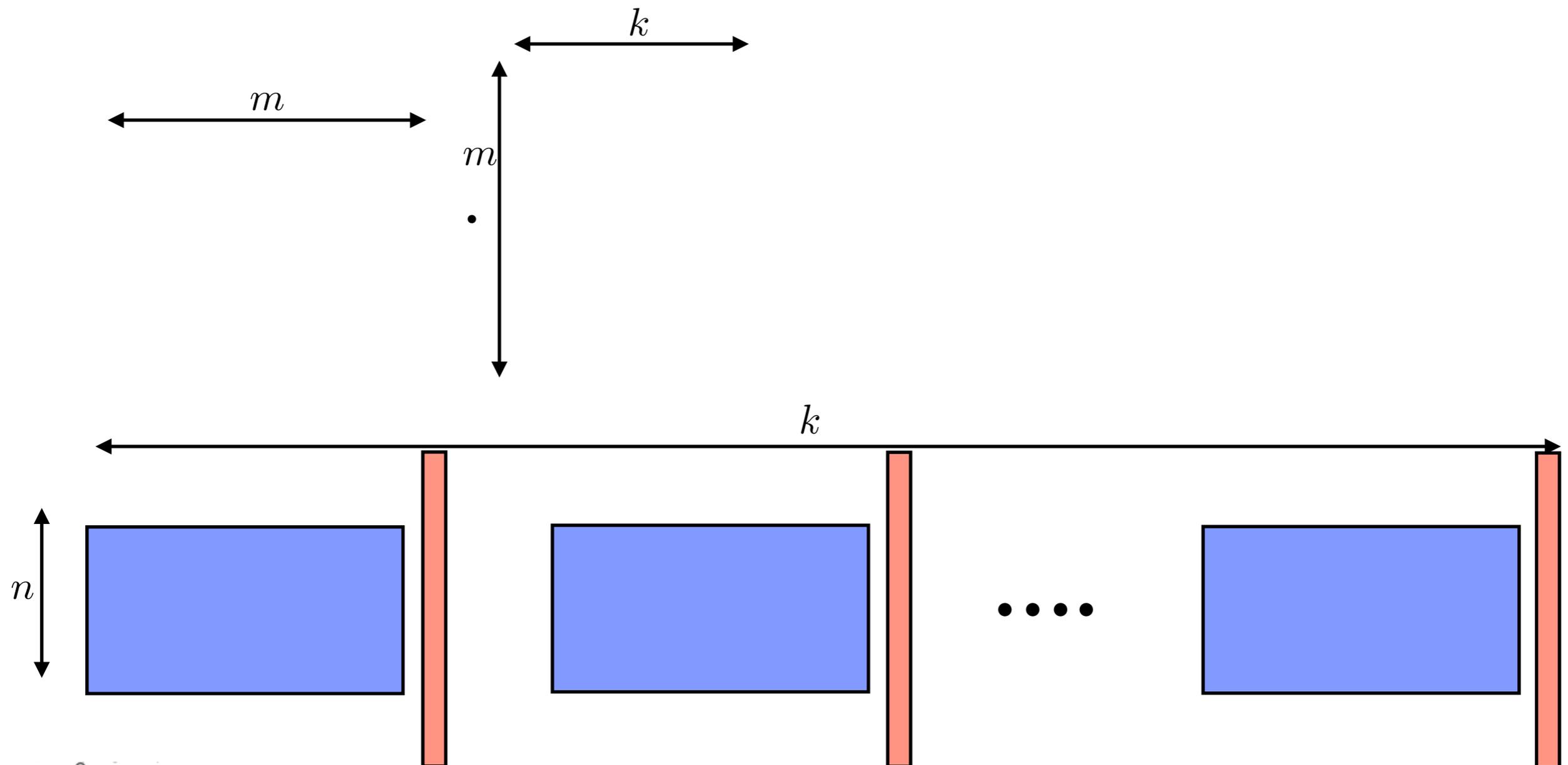
$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Multiplication matricielle

Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$  une matrice dont les colonnes sont  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ .  
La multiplication de  $A$  et  $B$  est la matrice  $C$  dont les colonnes sont  $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$

$$A \cdot B = A \cdot (\mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k) = (A\mathbf{b}_1 \mid A\mathbf{b}_2 \mid \dots \mid A\mathbf{b}_k)$$



# Exemple

---

# Exemple

---

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

# Exemple

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -5 \\ 3 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

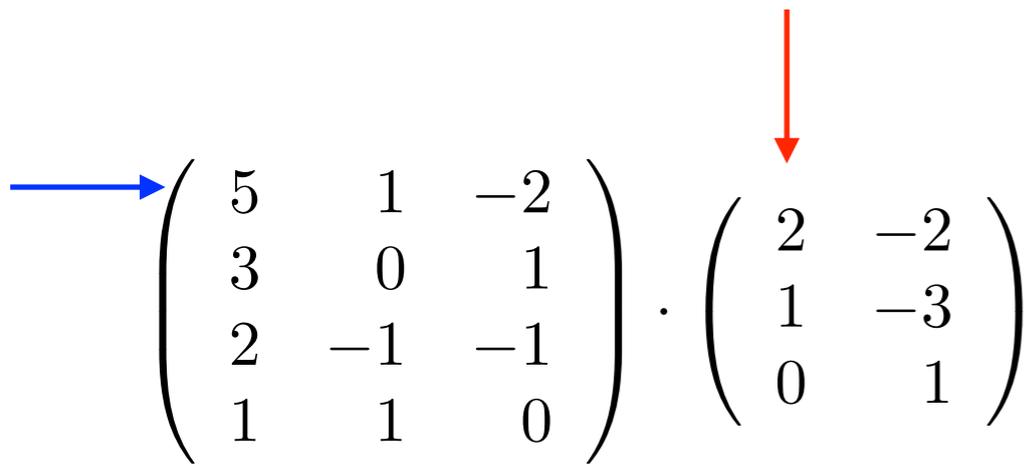
# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$



# Multiplication matricielle



A diagram illustrating matrix multiplication. A blue arrow points to the first row of the first matrix, and a red arrow points to the first column of the second matrix. The matrices are:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



A diagram showing the result of the matrix multiplication. A blue arrow points to the first row of the resulting matrix, and a red arrow points to the first column of the second matrix. The resulting matrix is:

$$\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + \end{pmatrix}$$

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A blue arrow points to the first row of the first matrix. A red arrow points to the first column of the second matrix.

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + \end{pmatrix}$$

A blue arrow points to the start of the expression. A red arrow points to the second term of the expression.

# Multiplication matricielle

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Diagram illustrating the first step of matrix multiplication. A blue arrow points to the first row of the first matrix, and a red arrow points to the first column of the second matrix. The element  $-2$  in the first row, third column of the first matrix is highlighted with a blue box, and the element  $0$  in the first row, third column of the second matrix is highlighted with a red box.

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 \\ \phantom{5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0} \\ \phantom{5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0} \\ \phantom{5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Diagram illustrating the second step of matrix multiplication. A blue arrow points to the first row of the resulting matrix, and a red arrow points to the first row of the second matrix. The expression  $5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0$  is shown inside the first row of the resulting matrix.

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + \end{pmatrix}$$



# Multiplication matricielle

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

The element  $-2$  in the first row, third column of the first matrix is highlighted with a blue box. The element  $1$  in the third row, second column of the second matrix is highlighted with a red box. A blue arrow points to the first matrix, and a red arrow points to the second matrix.

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

The second element of the resulting matrix,  $5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1$ , is highlighted with a red arrow pointing to it from above.

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ \end{pmatrix}$$

# Multiplication matricielle

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

The diagram shows the first matrix with its third column highlighted in blue and the second matrix with its third row highlighted in red. A blue arrow points to the first matrix, and a red arrow points to the second matrix.

$$\begin{matrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

The diagram shows the calculation of the first two rows of the resulting matrix. The first row contains the expressions  $5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0$  and  $5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1$ . The second row contains the expression  $3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0$ . A blue arrow points to the first row of the resulting matrix, and a red arrow points to the second row of the resulting matrix.

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A blue arrow points to the element 3 in the second row, first column of the first matrix. A red arrow points to the element -2 in the first row, second column of the second matrix.

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & \end{pmatrix}$$

A blue arrow points to the first row of the resulting matrix. A red arrow points to the second column of the resulting matrix.

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The first matrix has a blue box around the element 1 in the second row, third column. The second matrix has a red box around the element 1 in the third row, second column. A blue arrow points to the first matrix, and a red arrow points to the second matrix.

$$\begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 3 \times -2 + 0 \times -3 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

The second matrix has a red arrow pointing to the top-right element of the resulting matrix.

# Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 1 \times 1 + -2 \times 0 & 5 \times -2 + 1 \times -3 + -2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 3 \times -2 + 0 \times -3 + 1 \times 1 \\ 2 \times 2 + -1 \times 1 + -1 \times 0 & 2 \times -2 + -1 \times -3 + -1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times -2 + 1 \times -3 + 0 \times 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -5 \\ 3 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

# Question de format

---

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

# Question de format

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

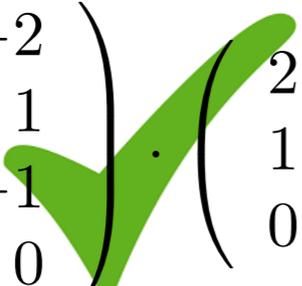
# Question de format

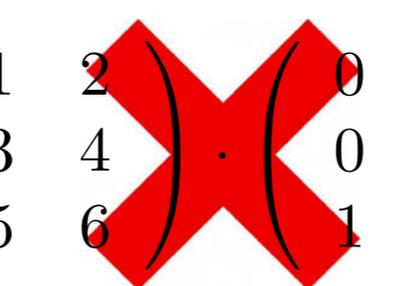
$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Question de format

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$


# Question de format

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Même si  $AB$  est définie,  $BA$  n'est pas forcément définie

# Question de format

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Même si  $AB$  est définie,  $BA$  n'est pas forcément définie

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

# Question de format

$AB$  est définie si et seulement si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Même si  $AB$  est définie,  $BA$  n'est pas forcément définie

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

# Attention!

---

Même si  $AB$  et  $BA$  sont les deux définies, elle ne sont pas forcément égale



# Attention!

Même si  $AB$  et  $BA$  sont les deux définies, elle ne sont pas forcément égale



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

# Attention!

Même si  $AB$  et  $BA$  sont les deux définies, elle ne sont pas forcément égale



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

# Attention!

Même si  $AB$  et  $BA$  sont les deux définies, elle ne sont pas forcément égale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$



$AB$  peut être la matrice nulle même si ni  $A$  et ni  $B$  ne sont nulles



# Attention!

Même si  $AB$  et  $BA$  sont les deux définies, elle ne sont pas forcément égale



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$AB$  peut être la matrice nulle même si ni  $A$  et ni  $B$  ne sont nulles



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Une formule pour la multiplication matricielle

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times k}$$

Soit  $a_{ij}$  la composante de  $A$  à la position  $(i, j)$

Soit  $b_{j\ell}$  la composante de  $B$  à la position  $(j, \ell)$

Soit  $C := AB$

La composante de  $C$  à la position  $(i, \ell)$  est égale à  $\sum_{j=1}^m a_{ij}b_{j\ell}$

# Quelques types de matrices

---

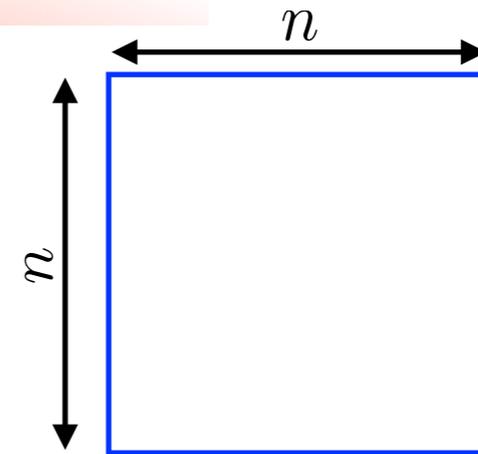
# Quelques types de matrices

---

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .

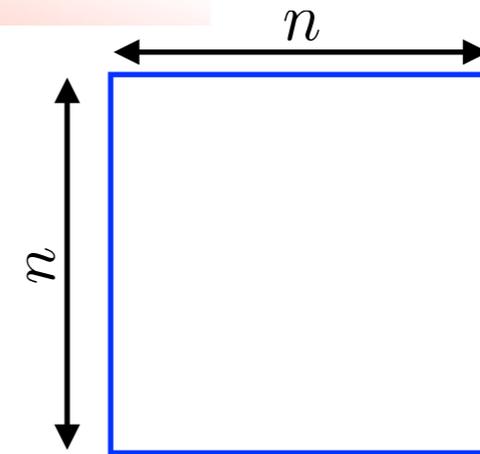
# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .



# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .

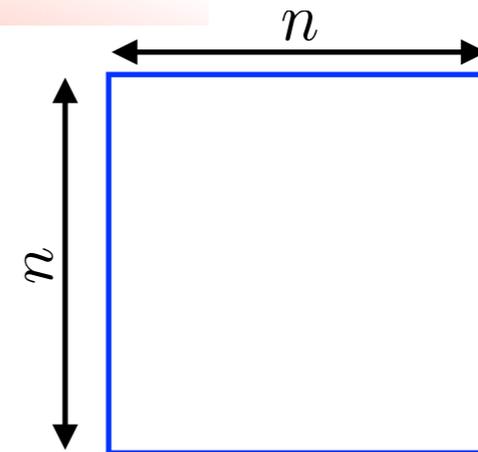


La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice  $0$ , et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$

# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .

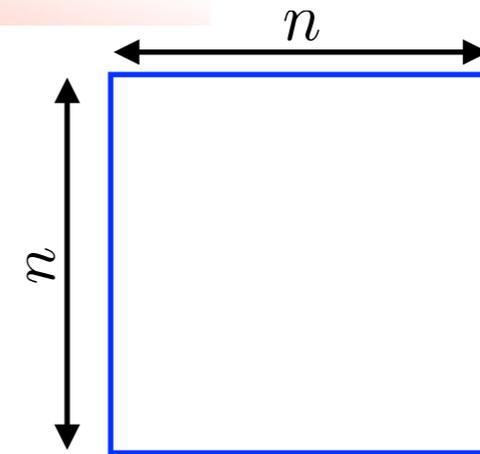
La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice 0, et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .



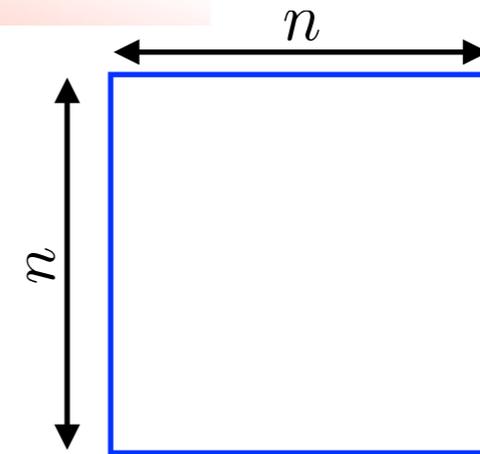
La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice 0, et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n$  et l'élément à position  $(i,j)$  de  $A$  est noté par  $a_{ij}$  alors les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les éléments diagonaux de  $A$ .

# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .



La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice 0, et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

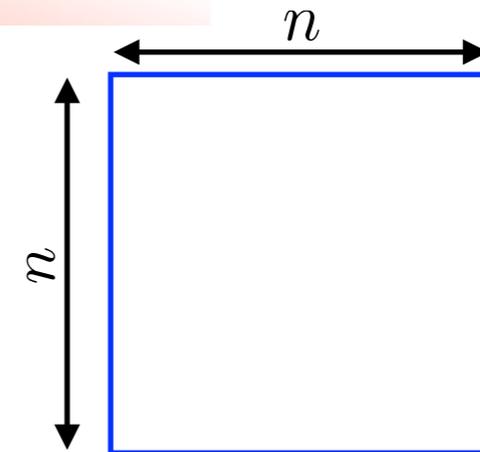
Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n$  et l'élément à position  $(i,j)$  de  $A$  est noté par  $a_{ij}$  alors les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les éléments diagonaux de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagonal elements  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  are highlighted with a red oval.

# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .



La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice 0, et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

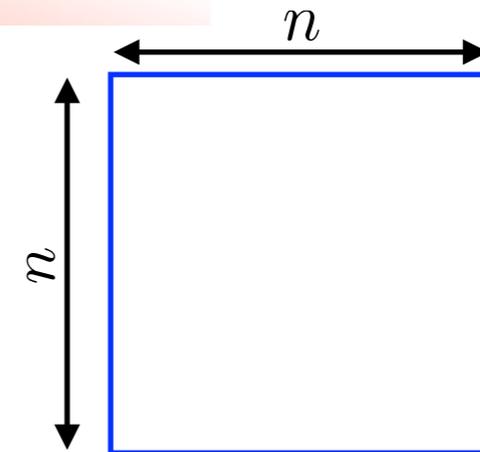
Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n$  et l'élément à position  $(i,j)$  de  $A$  est noté par  $a_{ij}$  alors les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les éléments diagonaux de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice carrée  $n \times n$  pour laquelle les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont égaux à 0 est appelée la matrice identité et noté par  $I_n$

# Quelques types de matrices

Une matrice avec le même nombre de lignes que de colonnes et appelée une matrice carrée. Dans ce cas, le nombre de lignes de  $A$  est appelé la taille de  $A$ .



La matrice du format  $m \times n$  dont les éléments sont tous nuls est appelée la matrice nulle ou la matrice 0, et est notée par  $0_{m \times n}$  ou simplement  $0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $A$  est une matrice carrée de taille  $n$  et l'élément à position  $(i,j)$  de  $A$  est noté par  $a_{ij}$  alors les éléments  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  sont appelés les éléments diagonaux de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

The diagonal elements  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  are highlighted with a red oval.

La matrice carrée  $n \times n$  pour laquelle les éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont égaux à 0 est appelée la matrice identité et noté par  $I_n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# La matrice identité

---

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$$

# La matrice identité

---

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \quad I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$$

Démonstration donnée pendant le cours.

# Règles du calcul

---

- (a) Commutativité de la somme :  $A + B = B + A$
- (b) Associativité de la somme :  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .
- (c) Associativité du produit :  $A(BC) = (AB)C$
- (d) Distributivité du produit par rapport à la somme :  $A(B + C) = AB + AC$   
 $(B + C)A = BA + CA$
- (e)  $A + 0 = A$
- (f)  $AI = IA = A$
- (g)  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

# L'inversion

---

# L'inversion

---

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . S'il existe une matrice  $B$  carrée de même taille telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ , on dit que  $A$  est inversible et on appelle  $B$  un inverse de  $A$ .

# L'inversion

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . S'il existe une matrice  $B$  carrée de même taille telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ , on dit que  $A$  est inversible et on appelle  $B$  un inverse de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# L'inversion

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . S'il existe une matrice  $B$  carrée de même taille telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ , on dit que  $A$  est inversible et on appelle  $B$  un inverse de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# L'inversion

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . S'il existe une matrice  $B$  carrée de même taille telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ , on dit que  $A$  est inversible et on appelle  $B$  un inverse de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$  est l'inverse de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$  et vice versa.

# L'inversion

---

# L'inversion

---

Une matrice  $A$  est inversible si et seulement si son application linéaire associée, ça veut dire l'application  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , est bijective, i.e., si et seulement si chaque ligne et chaque colonne de  $A$  a une position pivot.

# L'inversion

---

Une matrice  $A$  est inversible si et seulement si son application linéaire associée, ça veut dire l'application  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , est bijective, i.e., si et seulement si chaque ligne et chaque colonne de  $A$  a une position pivot.

Démonstration donnée pendant le cours.