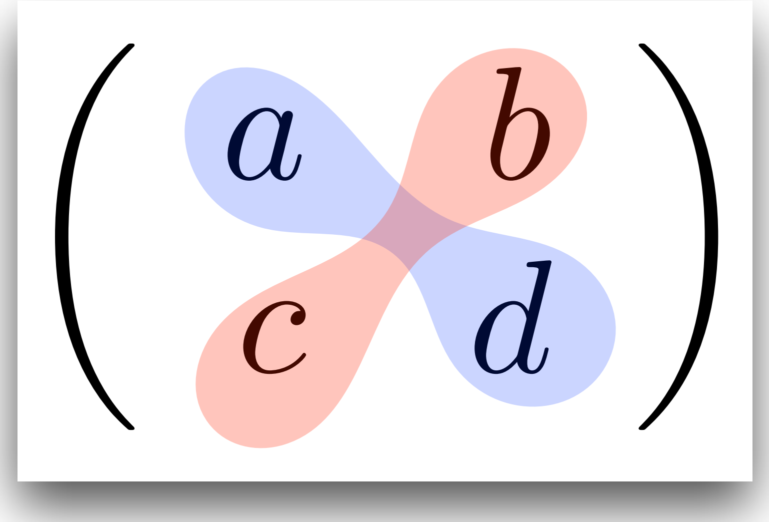
14.11.2016
v2.0

Le déterminant



Cas 2 x 2

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Cas 2 x 2

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

Cas 2 x 2

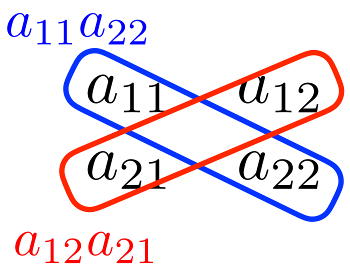
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11}a_{22}$

$$\begin{matrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} \end{matrix}$$

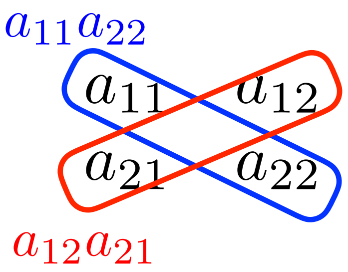
Cas 2 x 2

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



Cas 2 x 2

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$



$a_{11}a_{22}$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

$a_{12}a_{21}$

$$\longrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

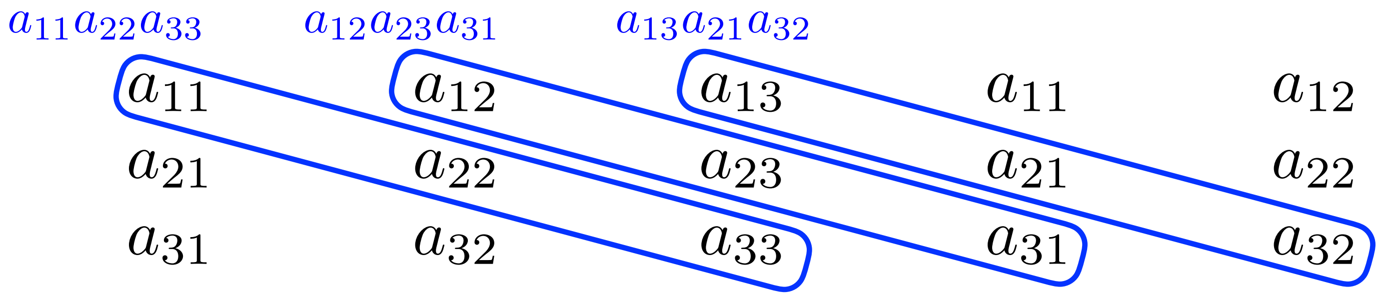
Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

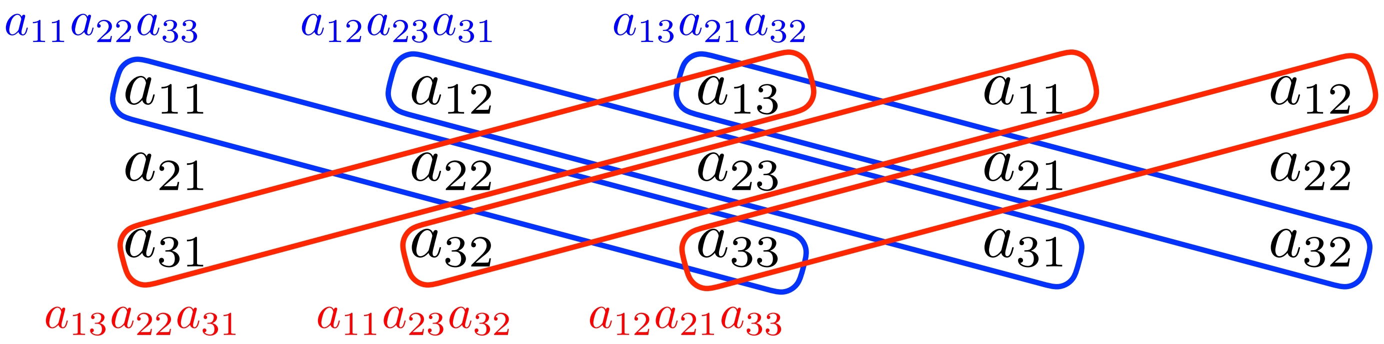


$a_{11}a_{22}a_{33}$ $\quad$ $a_{12}a_{23}a_{31}$ $\quad$ $a_{13}a_{21}a_{32}$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

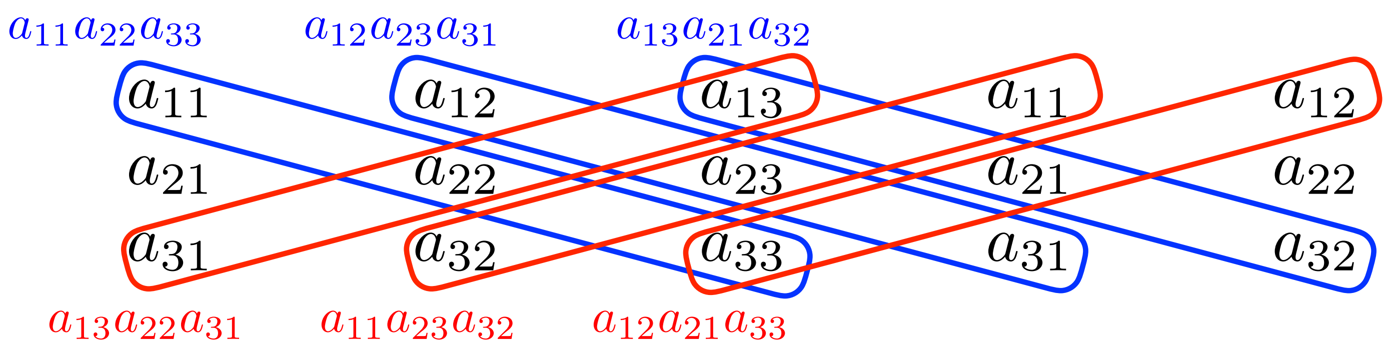
Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



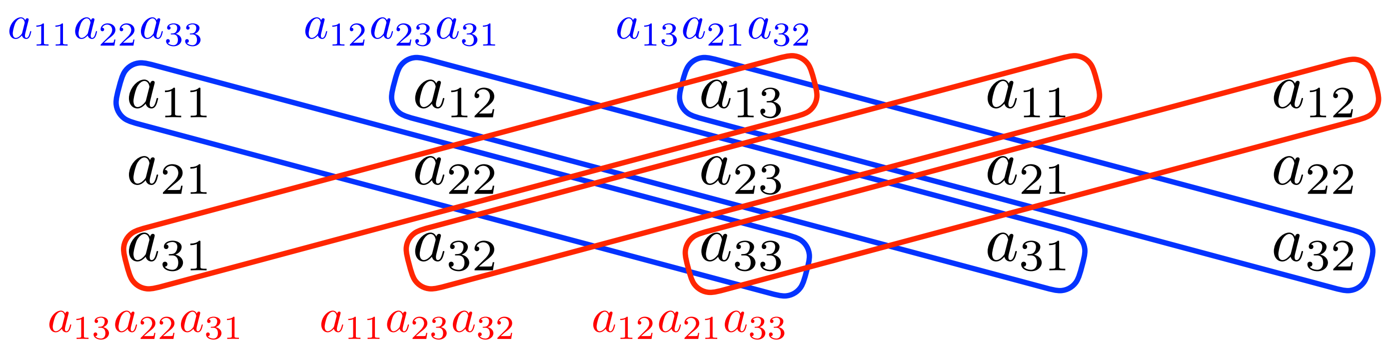
Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Cas 3 x 3: La formule de Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{+} & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = (-2)\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

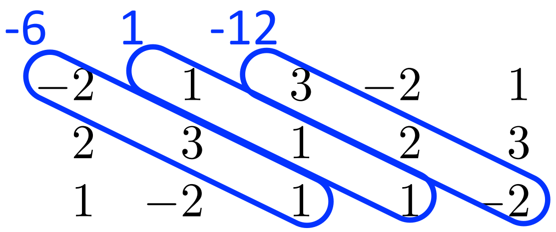
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

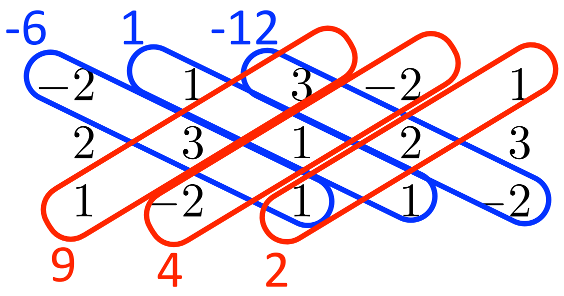


$$\begin{array}{ccccc} -6 & 1 & -12 & & \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

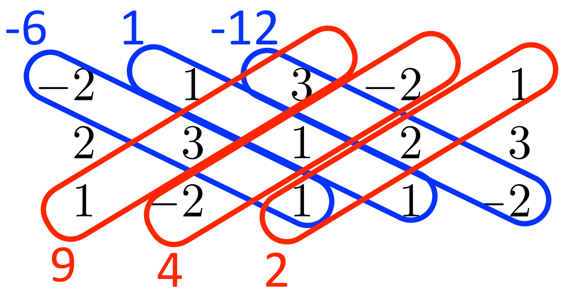
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

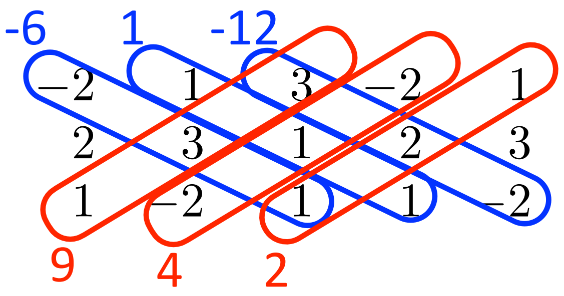
$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



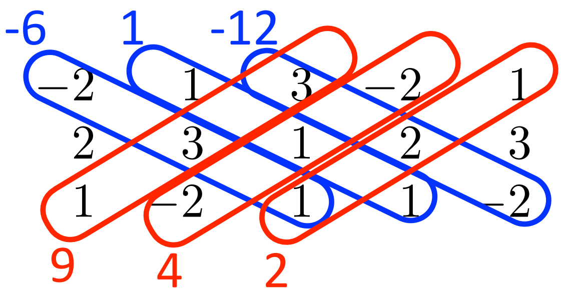
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{matrix}$$

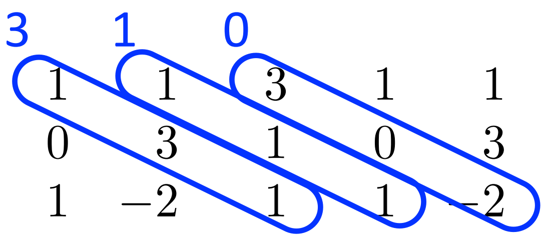
Développement par rapport à la première ligne

=-32

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

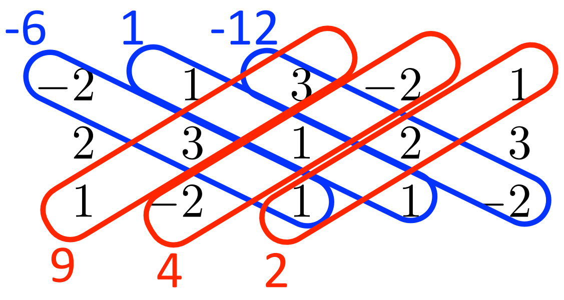


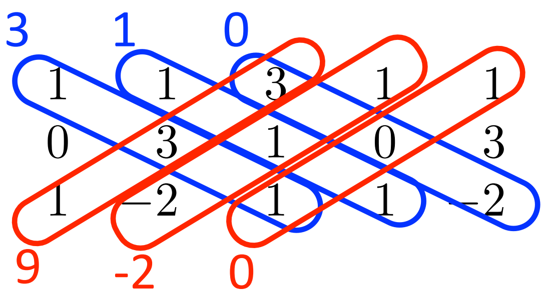


Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

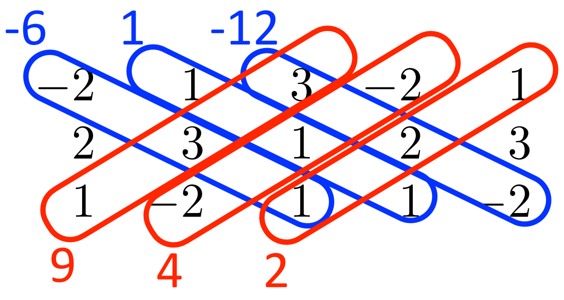


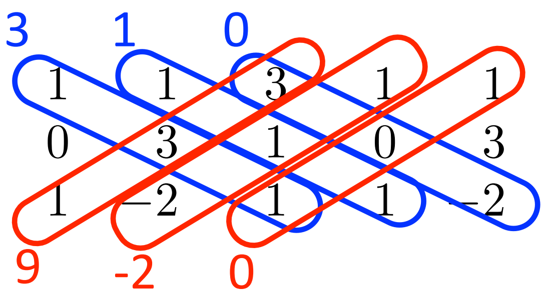


Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2&1&3\\2&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} + 1\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&-2&3\\0&2&1\\1&1&1\end{matrix}}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+&-&\boxed{+}&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$

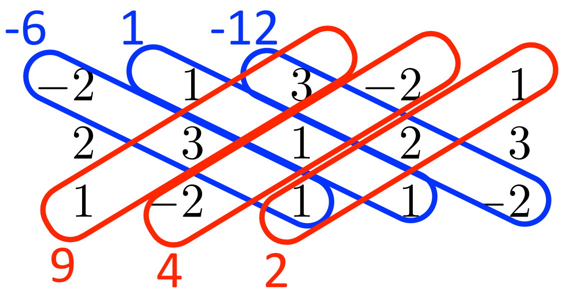




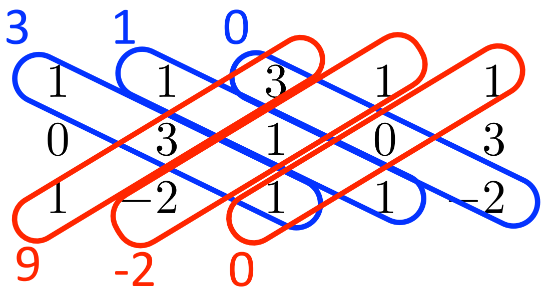
Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



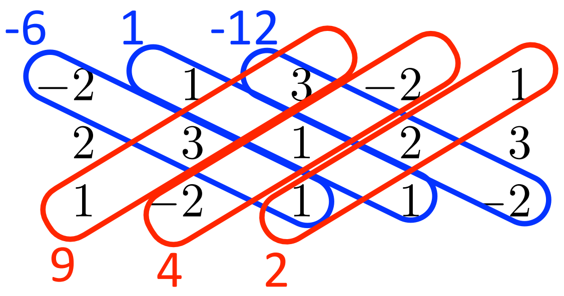
$$\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

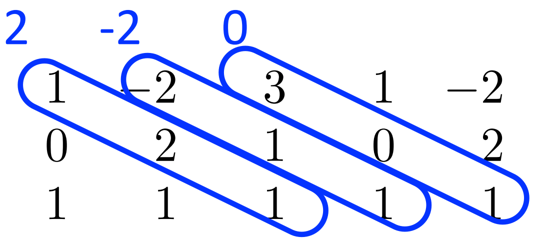


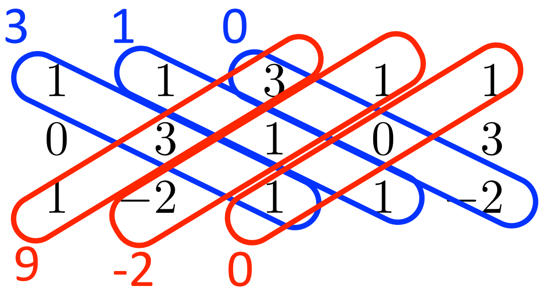
Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2&1&3\\2&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} + 1\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&-2&3\\0&2&1\\1&1&1\end{matrix}}\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$



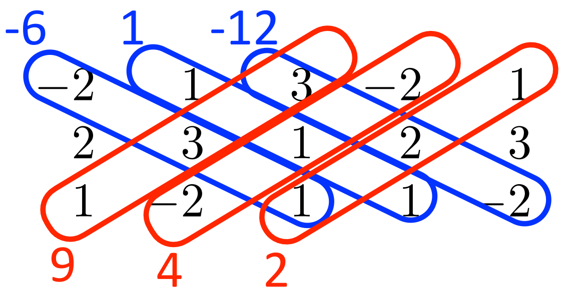


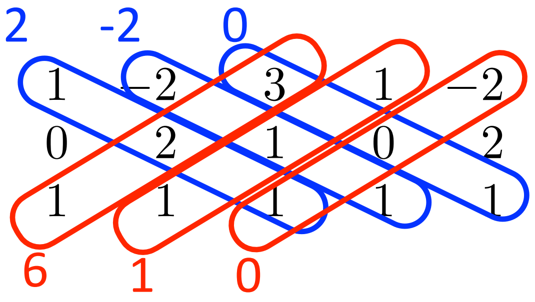


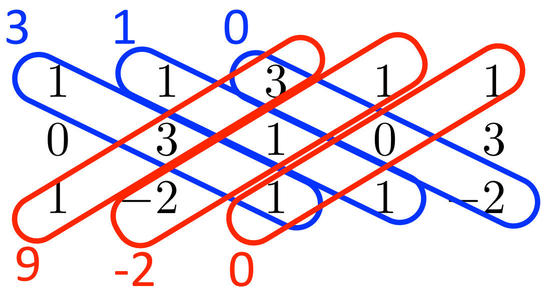
Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} + 1\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



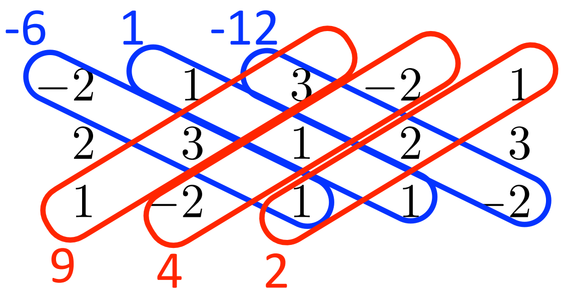


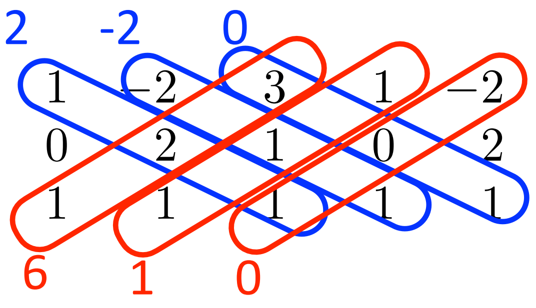


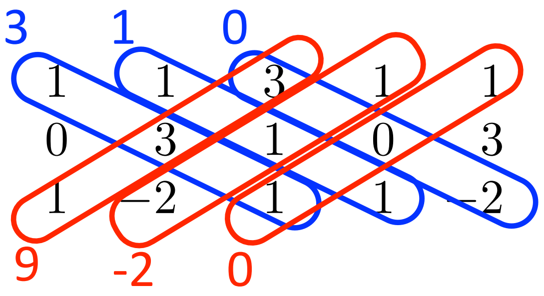
Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}} + 1\overset{=-7}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}} - 1\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{pmatrix}$$



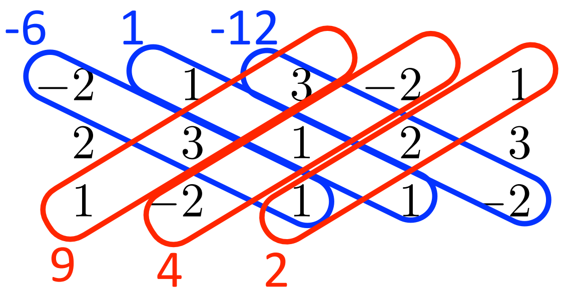


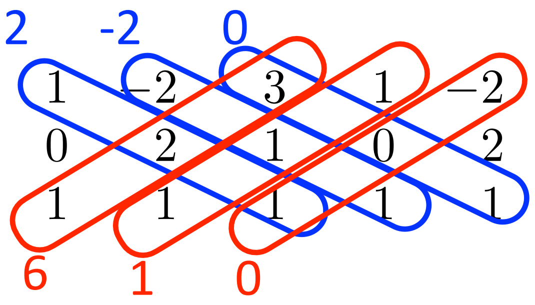


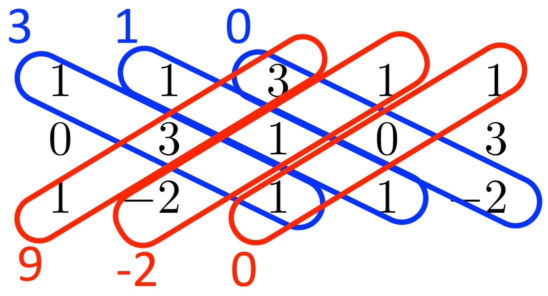
Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2&1&3\\2&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} -0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} +1\overset{=-7}{\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}} -1\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&2&3\\1&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$





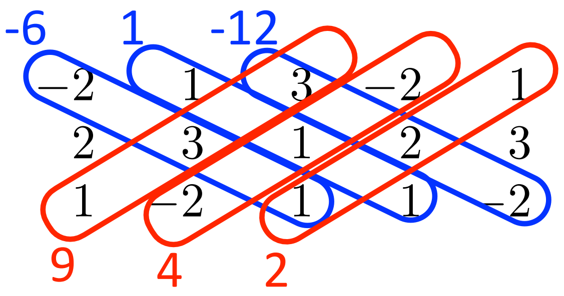


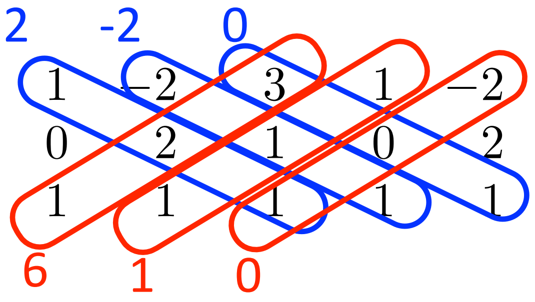
$$\begin{array}{cccc}1&-2&1&1\\0&2&3&0\\1&1&-2&1\end{array}$$

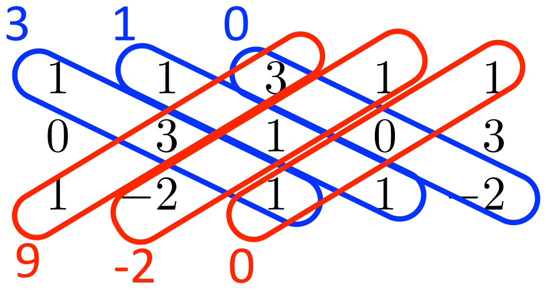
Développement par rapport à la première ligne

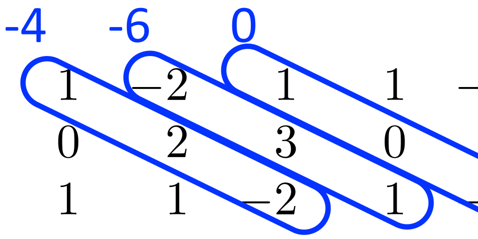
$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} + 1\overset{=-7}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$





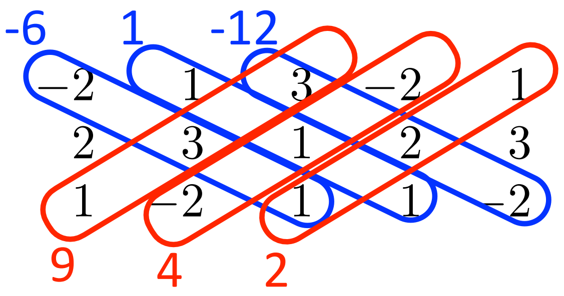


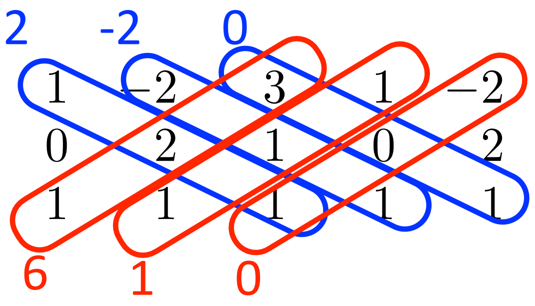


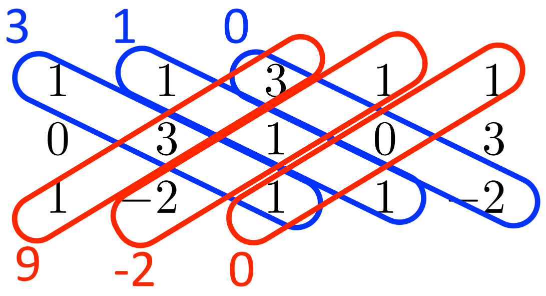
Développement par rapport à la première ligne

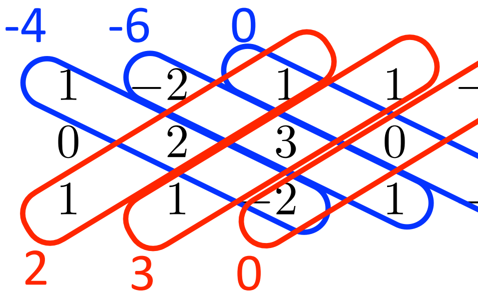
$$\det\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2&1&3\\2&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1&1&3\\0&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}} + 1\overset{=-7}{\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}} - 1\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&2&3\\1&1&-2\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{pmatrix}$$





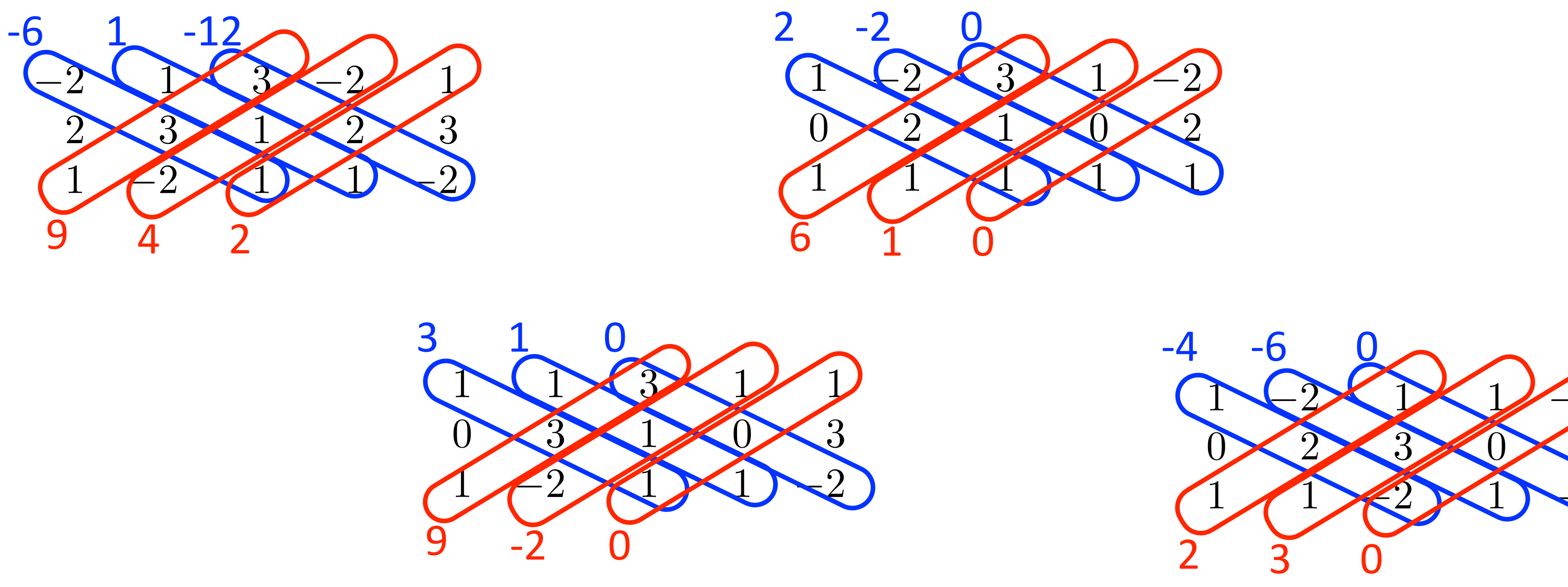




Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}} + 1\overset{=-7}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}} - 1\overset{=-15}{\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$



Développement par rapport à la première ligne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)\overset{=-32}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} + 1\overset{=-7}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} - 1\overset{=-15}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$= 64 - 7 + 15 = 72$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & \boxed{+} & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 2\overset{=-12}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} -2 \overset{=-3}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} -2 \overset{=-12}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} +1 \overset{=-15}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} -2 \overset{=-12}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} -2 \overset{=-15}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} +1 \overset{=18}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Développement par rapport à la deuxième colonne

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \overset{=-3}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 2 \overset{=-12}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} - 2 \overset{=-15}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} + 1 \overset{=18}{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= 0 + 24 + 30 + 18 = 72$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit A une matrice inversible de format n x n sur le corps K, soit $\boldsymbol{b}$ un vecteur de K^n et soit $A_i(\boldsymbol{b})$ la matrice obtenue en remplacent la colonne i de A par $\boldsymbol{b}$. Pour chaque i, la composante x_i de la solution du système $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit $A_i(\boldsymbol{b})$ la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

Exemple:

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i,* la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i,* la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit $A_i(\mathbf{b})$ la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1(\mathbf{b})) = -8$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1(\mathbf{b})) = -8$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1(\mathbf{b})) = -8 \qquad \det(A_2(\mathbf{b})) = 1$$

Regle de Cramer

Proposition 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, soit ***b*** un vecteur de K^n et soit A_i(***b***) la matrice obtenue en remplacent la colonne *i* de *A* par ***b***. Pour chaque *i*, la composante x_i de la solution du système *A**x***=***b*** est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$\det(A) = -5$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$\det(A_1(\mathbf{b})) = -8$$

$$\det(A_2(\mathbf{b})) = 1$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Colonne *i*

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne i

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne *i*

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne *i*

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) =$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
 & & & & & \text{Colonne } i & & & & &
\end{array}\right)$$

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=0

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|ccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & + & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

=0

$=x_i$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \qquad\quad 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \qquad\quad 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} \qquad 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \quad + \quad x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \qquad x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \qquad x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \qquad\quad x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Colonne *i*

$$\det I_i(\mathbf{x}) = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=x_i} = x_i$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right) = (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_{i-1} \mid \mathbf{x} \mid \mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n)$$

Colonne *i*

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_{i-1} \mid \mathbf{x} \mid \mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n)$$

Colonne *i*

$$A \cdot I_i(\mathbf{x}) = (A\mathbf{e}_1 \mid A\mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_{i-1} \mid A\mathbf{x} \mid A\mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_n) = A_i(\mathbf{b})$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_{i-1} \mid \mathbf{x} \mid \mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n)$$

Colonne *i*

$$A \cdot I_i(\mathbf{x}) = (A\mathbf{e}_1 \mid A\mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_{i-1} \mid A\mathbf{x} \mid A\mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_n) = A_i(\mathbf{b})$$

$$\implies (\det A)(\underbrace{\det I_i(\mathbf{x})}_{=x_i}) = \det A_i(\mathbf{b})$$

Démonstration

$$I_i(\mathbf{x}) := \left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{i+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_n & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right) = (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_{i-1} \mid \mathbf{x} \mid \mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n)$$

Colonne *i*

$$A \cdot I_i(\mathbf{x}) = (A\mathbf{e}_1 \mid A\mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_{i-1} \mid A\mathbf{x} \mid A\mathbf{e}_{i+1} \mid \cdots \mid A\mathbf{e}_n) = A_i(\mathbf{b})$$

$$\Longrightarrow \ (\det A)\underset{=x_i}{(\det I_i(\mathbf{x}))} = \det A_i(\mathbf{b}) \quad \Longrightarrow \ x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}$$

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, et soit C_{ij} le co-facteur de *A* à la position (*i,j*), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne *j* et la ligne *i* de *A*. Donc, l'inverse de *A* est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K,* et soit C_{ij} le co-facteur de *A* à la position (*i,j*), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne *j* et la ligne *i* de *A*. Donc, l'inverse de *A* est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K,* et soit C_{ij} le co-facteur de *A* à la position (*i,j*), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne *j* et la ligne *i* de *A*. Donc, l'inverse de *A* est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

⚠

L'algorithme de pivot de Gauss est beaucoup plus efficace que cette formule

Exemple:

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, et soit C_{ij} le co-facteur de *A* à la position (*i,j*), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne *j* et la ligne *i* de *A*. Donc, l'inverse de *A* est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

⚠

L'algorithme de pivot de Gauss est beaucoup plus efficace que cette formule

Exemple: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 1$

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit A une matrice inversible de format n x n sur le corps K, et soit C_{ij} le co-facteur de A à la position (i,j), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne j et la ligne i de A. Donc, l'inverse de A est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

L'algorithme de pivot de Gauss est beaucoup plus efficace que cette formule

Exemple: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}^{-1} =$$

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit A une matrice inversible de format n x n sur le corps K, et soit C_{ij} le co-facteur de A à la position (i,j), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne j et la ligne i de A. Donc, l'inverse de A est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

L'algorithme de pivot de Gauss est beaucoup plus efficace que cette formule

Exemple: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Une formule pour l'inverse d'une matrice

Théorème 16.1: Soit *A* une matrice inversible de format *n* x *n* sur le corps *K*, et soit C_{ij} le co-facteur de *A* à la position (*i,j*), c'est-à-dire, $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice où on enlève la colonne *j* et la ligne *i* de *A*. Donc, l'inverse de *A* est donnée explicitement par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

L'algorithme de pivot de Gauss est beaucoup plus efficace que cette formule

Exemple: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & -23 & -7 \\ -23 & 10 & 3 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

La démonstration utilise la règle de Cramer et peut être trouvée dans la chapitre 3.3 du livre.

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en multipliant par c la ligne i de I_n où c est un nombre réel non nul.

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en multipliant par c la ligne i de I_n où c est un nombre réel non nul.

$$E_i(c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en multipliant par c la ligne i de I_n où c est un nombre réel non nul.

$$E_i(c)$$

Ligne i

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en multipliant par c la ligne i de I_n où c est un nombre réel non nul.

$$E_i(c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire, même diagonale, alors son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux, c'est-à-dire,

$$1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times c \times 1 \times \ldots \times 1 = c$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 1: *$E_i(c)$* est la matrice de taille *n* x *n* obtenue en multipliant par *c* la ligne *i* de I_n où *c* est un nombre réel non nul.

$$E_i(c)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire, même diagonale, alors son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux, c'est-à-dire,

1 x 1 x … x 1 x *c* x 1 x … x 1 = *c*

$$\Longrightarrow \det E_i(c) = c$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille n x n obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{ij}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille n x n obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{ij}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

Ligne i

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille *n* x *n* obtenue en permutant les *i*-ème et *j*-ème lignes de I_n.

$$E_{ij}$$

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \text{Ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{Ligne } j \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille n x n obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{ij}$$

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{\cdots} & \boxed{0} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \text{Ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{Ligne } j \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille n x n obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{ij} \to I_n$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \text{Ligne } i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \text{Ligne } j & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille n x n obtenue en permutant les i-ème et j-ème lignes de I_n.

$$E_{ij} \to I_n$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \text{Ligne } i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \text{Ligne } j & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

En permutant les lignes i et j de la matrice E_{ij}, on arrive à la matrice identité In.

La permutation de deux lignes change le signe du déterminant. Alors

$$\det E_{ij} = - \det I_n$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 2: E_{ij} est la matrice de taille *n* x *n* obtenue en permutant les *i*-ème et *j*-ème lignes de I_n.

$$E_{ij} \to I_n$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

Ligne *i*

Ligne *j*

En permutant les lignes *i* et *j* de la matrice E_{ij}, on arrive à la matrice identité In.

La permutation de deux lignes change le signe du déterminant. Alors

det E_{ij} = - det I_n

$$\Longrightarrow \det E_{ij} = -1$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en mettant c à la position (i,j) de la matrice identité I_n.

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en mettant c à la position (i,j) de la matrice identité I_n.

$$\begin{array}{cc}
\text{Colonne } j & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} & \text{Ligne } i
\end{array}$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en mettant c à la position (i,j) de la matrice identité I_n.

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire, alors son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux, c'est-à-dire,

1 x 1 x … x 1 x … x 1 = 1

Les déterminants des matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille n x n obtenue en mettant c à la position (i,j) de la matrice identité I_n.

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire, alors son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux, c'est-à-dire,

1 x 1 x … x 1 x … x 1 = 1

$$\Longrightarrow \det E_{ij}(c) = 1$$

Les déterminants des matrices élémentaires

Théorème 16.2: Les déterminants des matrices élémentaires est donnés par:

- det $E_i(c) = c$
- det $E_{ij} = -1$ si $i \neq j$
- det $E_{ij}(c) = 1$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

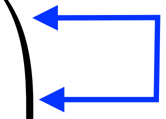
$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow\!\rceil \\ \leftarrow\!\rfloor \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$



$$\sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \times 2 \\ + \end{array}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{matrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \quad \\ \leftarrow + \quad \\ \quad \times(-1) \\ \leftarrow + \quad \\ \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}} \sim \underset{=E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\-2&0&1&1\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}}\begin{matrix}\times 2\\ +\\ \times(-1)\\ +\end{matrix} \sim \underset{=E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&-4&3&7\\0&2&3&1\\0&3&-3&-2\end{pmatrix}}\begin{matrix}\\ \div(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \underset{=E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3/4&-7/4\\0&2&3&1\\0&3&-3&-2\end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{array} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ + \quad \times(-3) \\ + \end{array}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \quad \times(-1) \\ + \\ \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \times(-2) \quad \times(-3) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \leftarrow\!\urcorner \\ \leftarrow\!\lrcorner \\ \\ \\ \end{array} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{array} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ + \quad \times(-3) \\ + \end{array} \sim \underset{= E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ + \quad \times(-3) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \\ \div(9/2) \\ \\ \end{matrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \div(-4)$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \times(-3) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}} \div(9/2)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}$$

$$= E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \underset{= E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \div(-4)$$

$$\sim \underset{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \times(-3) \\ + \end{matrix} \sim \underset{= E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}} \div(9/2)$$

$$\sim \underset{= E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} \times(3/4) \\ + \end{matrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{array} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{= E_{12} \cdot A} \begin{array}{l} \times 2 \\ \leftarrow + \\ \quad \times(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{= E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A} \begin{array}{l} \\ \div(-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_{= E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A} \begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \leftarrow + \quad \times(-3) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}}_{= E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A} \begin{array}{l} \\ \\ \div(9/2) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & 13/4 \end{pmatrix}}_{= E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A} \begin{array}{l} \\ \\ \times(3/4) \\ \leftarrow + \end{array} \qquad \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}-2&0&1&1\\1&-2&1&3\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}} \sim \underset{=E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\-2&0&1&1\\0&2&3&1\\1&1&-2&1\end{pmatrix}} \begin{matrix}\times 2\\ +\\ \times(-1)\\ +\end{matrix} \sim \underset{=E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&-4&3&7\\0&2&3&1\\0&3&-3&-2\end{pmatrix}} \begin{matrix}\div(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \underset{=E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3/4&-7/4\\0&2&3&1\\0&3&-3&-2\end{pmatrix}} \begin{matrix}\times(-2)\\ +\\ \times(-3)\\ +\end{matrix} \sim \underset{=E_{24}(-3)\cdot E_{23}(-2)\cdot E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3/4&-7/4\\0&0&9/2&9/2\\0&0&-3/4&13/4\end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \\ \div(9/2)\\ \end{matrix}$$

$$\sim \underset{=E_3(2/9)\cdot E_{24}(-3)\cdot E_{23}(-2)\cdot E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3/4&-7/4\\0&0&1&1\\0&0&-3/4&13/4\end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \\ \times(3/4)\\ +\end{matrix} \sim \underset{=E_{34}(3/4)\cdot E_3(2/9)\cdot E_{24}(-3)\cdot E_{23}(-2)\cdot E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A}{\begin{pmatrix}1&-2&1&3\\0&1&-3/4&-7/4\\0&0&1&1\\0&0&0&4\end{pmatrix}}$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\div 4}$$

$$= E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{\div 4}$$

$$= E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\det(E_4(1/4))\det(E_{34}(3/4))\det(E_3(2/9))\det(E_{24}(-3))\det(E_{23}(-2))\det(E_2(-1/4))\det(E_{14}(-1))\det(E_{12}(2))\det(E_{12})\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underbrace{\det(E_4(1/4))}_{=1/4} \det(E_{34}(3/4)) \det(E_3(2/9)) \det(E_{24}(-3)) \det(E_{23}(-2)) \det(E_2(-1/4)) \det(E_{14}(-1)) \det(E_{12}(2)) \det(E_{12}) \det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\det(E_3(2/9))\det(E_{24}(-3))\det(E_{23}(-2))\det(E_2(-1/4))\det(E_{14}(-1))\det(E_{12}(2))\det(E_{12})\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\,\underset{=2/9}{\det(E_3(2/9))}\det(E_{24}(-3))\det(E_{23}(-2))\det(E_2(-1/4))\det(E_{14}(-1))\det(E_{12}(2))\det(E_{12})\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\,\underset{=2/9}{\det(E_3(2/9))}\,\underset{=1}{\det(E_{24}(-3))}\,\det(E_{23}(-2))\,\det(E_2(-1/4))\,\det(E_{14}(-1))\,\det(E_{12}(2))\,\det(E_{12})\,\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\,\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\,\underset{=2/9}{\det(E_3(2/9))}\,\underset{=1}{\det(E_{24}(-3))}\,\underset{=1}{\det(E_{23}(-2))}\,\det(E_2(-1/4))\,\det(E_{14}(-1))\,\det(E_{12}(2))\,\det(E_{12})\,\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\det(E_4(1/4)) \det(E_{34}(3/4)) \det(E_3(2/9)) \det(E_{24}(-3)) \det(E_{23}(-2)) \det(E_2(-1/4)) \det(E_{14}(-1)) \det(E_{12}(2)) \det(E_{12}) \det A = 1$$

=1/4 =1 =2/9 =1 =1 =-1/4

Comment calculer le déterminant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4)\cdot E_{34}(3/4)\cdot E_3(2/9)\cdot E_{24}(-3)\cdot E_{23}(-2)\cdot E_2(-1/4)\cdot E_{14}(-1)\cdot E_{12}(2)\cdot E_{12}\cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\det(E_4(1/4))\det(E_{34}(3/4))\det(E_3(2/9))\det(E_{24}(-3))\det(E_{23}(-2))\det(E_2(-1/4))\det(E_{14}(-1))\det(E_{12}(2))\det(E_{12})\det A = 1$$

=1/4 =1 =2/9 =1 =1 =-1/4 =1

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\det(E_4(1/4))\det(E_{34}(3/4))\det(E_3(2/9))\det(E_{24}(-3))\det(E_{23}(-2))\det(E_2(-1/4))\det(E_{14}(-1))\det(E_{12}(2))\det(E_{12})\det A = 1$$

=1/4 =1 =2/9 =1 =1 =-1/4 =1 =1

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\,\underset{=2/9}{\det(E_3(2/9))}\,\underset{=1}{\det(E_{24}(-3))}\,\underset{=1}{\det(E_{23}(-2))}\,\underset{=-1/4}{\det(E_2(-1/4))}\,\underset{=1}{\det(E_{14}(-1))}\,\underset{=1}{\det(E_{12}(2))}\,\underset{=-1}{\det(E_{12})}\det A = 1$$

Comment calculer le déterminant

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_4(1/4) \cdot E_{34}(3/4) \cdot E_3(2/9) \cdot E_{24}(-3) \cdot E_{23}(-2) \cdot E_2(-1/4) \cdot E_{14}(-1) \cdot E_{12}(2) \cdot E_{12} \cdot A$$

Triangulaire supérieur
Déterminant = le produit des éléments diagonaux
= 1 x 1 x …. x 1
= 1

$$\underset{=1/4}{\det(E_4(1/4))}\,\underset{=1}{\det(E_{34}(3/4))}\,\underset{=2/9}{\det(E_3(2/9))}\,\underset{=1}{\det(E_{24}(-3))}\,\underset{=1}{\det(E_{23}(-2))}\,\underset{=-1/4}{\det(E_2(-1/4))}\,\underset{=1}{\det(E_{14}(-1))}\,\underset{=1}{\det(E_{12}(2))}\,\underset{=-1}{\det(E_{12})}\,\det A = 1$$

$$\Longrightarrow \det(A) = 4 \cdot (9/2) \cdot (-4) \cdot (-1) = 72$$

Comment calculer le déterminant

En général:

- Poser le déterminant à la valeur 1 au debut, et utiliser l'algorithme de pivot de Gauss
- Pour chaque changement des lignes, multiplier le déterminant par -1
- Chaque fois que un élément pivot est trouvé, multiplier le déterminant par cet élément

Exemple

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = 1$

$D = (-1)*D = -1$

Changement des lignes

Multiplier par -1

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = 2*D = -2$

Pivot = 2

$D = 0*D = 0$

Pivot = 0

Volume, applications linéaires

Lisez aussi le pages 195-198 du livre.