Valeurs propres

Valeurs propres

- Un vecteur non nul qui est transformé en un multiple de lui même par une application linéaire sur un corps *K* est dit un *vecteur propre* de cette application (ou de la matrice associée)
- La valeur de ce multiple est dite la *valeur propre* du vecteur propre correspondant

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vecteur propre

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{Vecteur propre}}{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overset{\text{Valeur propre}}{\boxed{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vecteur propre Valeur propre

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Vecteur propre Valeur propre

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vecteur propre Valeur propre

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition

<u>Définition 17.1</u>: Soit A une matrice carrée de taille n sur un corps K.

- Un vecteur non nul $\boldsymbol{x}$ de K^n tel que $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ pour un λ de K est appelé un <u>*vecteur propre*</u> de A.
- La valeur λ est appelée une <u>*valeur propre*</u> de A.

Définition

Définition 17.1: Soit A une matrice carrée de taille n sur un corps K.

- Un vecteur non nul $\boldsymbol{x}$ de K^n tel que $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ pour un λ de K est appelé un *vecteur propre* de A.
- La valeur λ est appelée une *valeur propre* de A.

Questions principales:

(1) Pourquoi: On s'intéresse des vecteurs/valeurs propres pourquoi?

(2) Comment: Comment est-ce que on peut les calculer? Existent-ils toujours?

Pourquoi?

- Les applications dans la théorie d'équations différentielles (Analyse II)
- Transformation d'une matrice en une forme plus simple (forme diagonale)
- Les applications dans la théorie des graphes
- Les applications dans la théorie de chaînes de Markov
- Les applications dans la théorie de marches aléatoires (par exemple, l'algorithme de PageRank)
- ……

Comment les calculer?

$$\exists \mathbf{x} \neq 0\colon\ A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Comment les calculer?

$$\exists \mathbf{x} \neq 0 \colon A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0$$

Comment les calculer?

$$\exists \mathbf{x} \neq 0 \colon A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Comment les calculer?

$$\exists \mathbf{x} \neq 0\colon\, A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0 \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Alors……

Comment les calculer?

$$\exists \mathbf{x} \neq 0\colon A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0 \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Alors……

Théorème 17.1: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K. **λ** est une valeur propre de A si et seulement si det(A- λI_n)=0. Dans ce cas, chaque vecteur ***x*** de ker(A- λI_n) est un vecteur propre de A correspondent à la valeur propre **λ.**

Exemple

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2)$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x)+18$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x)+18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x)+18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
$\lambda_1=2$ et $\lambda_2=-1$

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

algolma
laboratoire d'algorithmique
laboratoire de mathématiques algorithmique

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$A - (-1)I_2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
λ_1=2 et λ_2=-1

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$A - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x)+18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
$\lambda_1=2$ et $\lambda_2=-1$

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$A - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x) + 18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
$\lambda_1=2$ et $\lambda_2=-1$

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$A - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A + I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Première étape: calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \det\begin{pmatrix} -4-x & 6 \\ -3 & 5-x \end{pmatrix} = -(4+x)(5-x)+18 = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont
$\lambda_1=2$ et $\lambda_2=-1$

Deuxième étape: Pour chaque valeur propre, calculer le noyau de A- λI_2

Vecteur propre

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre

$$A - (-1)I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A + I_2) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Alors….

Sur $\mathbb{R}$ il y a une infinité des vecteurs propres pour une valeur propre donnée

Alors....

Sur $\mathbb{R}$ il y a une infinité des vecteurs propres pour une valeur propre donnée

Car $\ker(A-\lambda I_n)$ a une infinité d'éléments si λ et une valeur propre de A

Quelques définitions

Définition 17.2: Soit *A* une matrice carrée de taille *n* sur un corps *K.*

- Le polynôme det($A-xI_n$) est appelé le polynôme caractéristique de A.
- On dit que λ est une valeur propre ***de multiplicité k*** de *A* si le facteur (x- λ) apparaît *k* fois dans le polynôme caractéristique = sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} =$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x)$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12 + 4\times(-42)\times 6 - 4\times(-20-x)\times 12$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17 - x & 8 & 4 \\ -42 & -20 - x & -11 \\ 12 & 6 & 5 - x \end{pmatrix} = (17-x) \times (-20-x) \times (5-x) + 8 \times (-11) \times 12$$
$$+4 \times (-42) \times 6 \; -4 \times (-20-x) \times 12$$
$$-8 \times (-42) \times (5-x)$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= \; -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$

$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$

$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= \; -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$

$$-1008 + 48x + 960$$

$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

$$= -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= \; -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 2x^2 + x - 2$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Polynôme caractéristique $= \boxed{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$

Le nombre des valeurs propres est au maximum égal à 3, la taille de la matrice

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= \quad -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Polynôme caractéristique $= \boxed{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$

Le nombre des valeurs propres est au maximum égal à 3, la taille de la matrice

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (x-1) = -x^2 + x + 2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Polynôme caractéristique $= \boxed{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$

Le nombre des valeurs propres est au maximum égal à 3, la taille de la matrice

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (x-1) = -x^2 + x + 2 \implies x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = 2, -1$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 17-x & 8 & 4 \\ -42 & -20-x & -11 \\ 12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (17-x)\times(-20-x)\times(5-x) + 8\times(-11)\times 12$$
$$+4\times(-42)\times 6 \; -4\times(-20-x)\times 12$$
$$-8\times(-42)\times(5-x) - (17-x)\times(-11)\times 6$$

$$= -x^3 + 2x^2 + 355x - 1700 - 1056$$
$$-1008 + 48x + 960$$
$$-66x + 1122 - 336x + 1680$$

Polynôme caractéristique $= \boxed{-x^3 + 2x^2 + x - 2}$

Le nombre des valeurs propres est au maximum égal à 3, la taille de la matrice

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \div (x-1) = -x^2 + x + 2 \implies x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = 2, -1$$

Les valeurs propres sont λ_1=1, λ_2=2, λ_3=-1. Chacun a de multiplicité 1

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre -1

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ -42 & -21 & -11 \\ 12 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ -42 & -22 & -11 \\ 12 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/15 & 4/15 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre 2

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 4 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ -42 & -19 & -11 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 2/3 & 10/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A + I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Vecteur propre pour la valeur propre -1

La somme de dim ker(A-$\lambda_i I_n$) est égale à 3, la taille de la matrice

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x)\begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} -4 \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x)\begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 5x^2 - 8x + 4) \div (x-1) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 5x^2 - 8x + 4) \div (x-1) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x)\begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 5x^2 - 8x + 4) \div (x-1) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

Alors, le nombre des valeurs propres différentes peut être strictement inférieur à la taille de la matrice

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -9-x & 4 & -3 \\ -11 & 6-x & -3 \\ 22 & -8 & 8-x \end{pmatrix} = -(9+x) \begin{vmatrix} 6-x & -3 \\ -8 & 8-x \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -11 & -3 \\ 22 & 8-x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -11 & 6-x \\ 22 & -8 \end{vmatrix}$$

Polynôme caractéristique $= -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

$$x_1 = 1 \implies (-x^3 + 5x^2 - 8x + 4) \div (x-1) = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

Alors, le nombre des valeurs propres différentes peut être strictement inférieur à la taille de la matrice

La valeur 1 est de multiplicité 1, et la valeur 2 est de multiplicité 2

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \ker(A - 2I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Deux vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 2

Les vecteurs propres

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} -9 & 4 & -3 \\ -11 & 6 & -3 \\ 22 & -8 & 8 \end{pmatrix}$

Conseil: 1 est une valeur propre seulement dans ce cas

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -3 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ -11 & 5 & -3 \\ 22 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 3/5 & 3/10 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Vecteur propre pour la valeur propre 1

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -11 & 4 & -3 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ -11 & 4 & -3 \\ 22 & -8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \ker(A - 2I_3) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}}, \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}} \right\rangle$$ Deux vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 2

La somme de dim $\ker(A-\lambda_i I_n)$ est égale à 3, la taille de la matrice

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$ Polynôme caractéristique

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$ Polynôme caractéristique

Il y a qu'une valeur propre de multiplicité 2, à savoir λ=1

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

Polynôme caractéristique

Il y a qu'une valeur propre de multiplicité 2, à savoir λ=1

$$A - I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

Polynôme caractéristique

Il y a qu'une valeur propre de multiplicité 2, à savoir λ=1

$$A - I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple

Calculer les vecteurs et les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$ Polynôme caractéristique

Il y a qu'une valeur propre de multiplicité 2, à savoir **λ**=1

$$A - I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_1) = \left\langle \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Qu'un vecteur propre, alors, La somme de dim ker(A-$\lambda_i I_n$) est strictement inférieur à 2, la taille de la matrice

Alors…

<u>Proposition 17.1</u>: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K. Donc, A a au maximum n valeurs propres.

Alors…

<u>Proposition 17.1</u>: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K. Donc, A a au maximum n valeurs propres.

Car $\det(A-xI_n)$ est un polynôme de degré n sur le corps K, alors il a au maximum n racines.

det et Tr

Proposition 17.2: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K.

(1) Le produit de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égal à det(A)

(2) La somme de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égale à Tr(A)

det et Tr

Proposition 17.2: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K.

(1) Le produit de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égal à det(A)

(2) La somme de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égale à Tr(A)

Corollaire 17.1: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K. A est inversible, si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

det et Tr

Proposition 17.2: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K.

(1) Le produit de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égal à det(A)

(2) La somme de toutes les racines du polynôme caractéristique de A est égale à Tr(A)

Corollaire 17.1: Soit A une matrice de taille n x n sur un corps K. A est inversible, si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A.

Les démonstrations sont présentées pendant le cours

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

D=1

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

D=1 *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$\overset{D=1}{\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}} \sim \overset{D=D*17=17}{\begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

D=1 *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

D=*D**(-4/17)=-4

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

D=1 *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

D=*D**(-4/17)=-4

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

D=1 *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

D=*D**(-4/17)=-4 *D*=*D**(1/2)=-2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1 \implies \det A = -2 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

D=1 *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

D=*D**(-4/17)=-4 *D*=*D**(1/2)=-2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1 \implies \det A = -2 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

D=1 — *D*=*D**17=17

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ -42 & -20 & -11 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & -4/17 & -19/17 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix}$$

D=*D**(-4/17)=-4 — *D*=*D**(1/2)=-2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 6/17 & 37/17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & 19/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 17 - 20 + 5 = 2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

Exemple

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 3, -1$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 3, -1$$

$$\det A = 1 - 4 = -3$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 3, -1$$

$\det A = 1 - 4 = -3$ $\lambda_1\lambda_2 = 3 \times (-1) = -3 = \det A$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 3, -1$$

$$\det A = 1 - 4 = -3 \qquad\qquad \lambda_1 \lambda_2 = 3 \times (-1) = -3 = \det A$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 2$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = (1-x)^2 - 4 = 1 - 2x + x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = 3, -1$$

$$\det A = 1 - 4 = -3 \qquad \lambda_1 \lambda_2 = 3 \times (-1) = -3 = \det A$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 2 \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 3 - 1 = 2 = \mathrm{Tr}(A)$$