# Calcul matriciel

# La dernière fois

# La dernière fois

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$ x $n$. S'il existe une matrice $B$ carrée de même taille telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$, on dit que *A est inversible* et on appelle $B$ *un inverse* de $A$.

# La dernière fois

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$ x $n$. S'il existe une matrice $B$ carrée de même taille telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$, on dit que *A est inversible* et on appelle $B$ *un inverse* de $A$.

Une matrice $A$ est inversible si et seulement si son application linéaire associée, ça veut dire l'application $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, est bijective, i.e., si et seulement si chaque ligne et chaque colonne de $A$ a une position pivot.

# l’inverse est unique

# l'inverse est unique

Si $B$ et $C$ sont des inverse de $A$, alors $B = C$

# l'inverse est unique

Si $B$ et $C$ sont des inverse de $A$, alors $B = C$

Démonstration donnée pendent le cours.

# Matrices 2 x 2

# Matrices 2 x 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# Matrices 2 x 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration donnée pendent le cours.

# Puissance d'une matrice

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A^m := \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{m \text{ facteurs}}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A^{-m} := \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{m \text{ facteurs}}$$

# Puissance d'une matrice

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A^m := \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{m \text{ facteurs}}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A^{-m} := \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{m \text{ facteurs}}$$

Si *A* est inversible

# L'inverse

# L'inverse

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles. Alors

(a) $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $A^m$ est inversible et $(A^m)^{-1} = A^{-m}$

(c) Si $c\neq 0$, alors $cA$ est inversible et $cA^{-1} = (1/c)A^{-1}$

(d) $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

# L'inverse

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles. Alors

(a) $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $A^m$ est inversible et $(A^m)^{-1} = A^{-m}$

(c) Si $c\neq 0$, alors $cA$ est inversible et $cA^{-1} = (1/c)A^{-1}$

(d) $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ ⚠

# L'inverse

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversibles. Alors

(a) $A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $A^m$ est inversible et $(A^m)^{-1} = A^{-m}$

(c) Si $c \neq 0$, alors $cA$ est inversible et $cA^{-1} = (1/c)A^{-1}$

(d) $AB$ est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Démonstration donnée pendent le cours.

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

<u>Type 1</u>: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\begin{array}{l}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{Ligne } i \end{array}$$

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Ligne $i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ligne $i$

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m\times m}$

Ligne $i$ Ligne $i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ligne $i$

# Matrices élémentaires

<u>Type 1</u>: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Ligne $i$

Ligne $i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ligne $i$

Le composantes de la ligne $i$ sont toutes multipliées par $c$

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m\times m}$

Ligne $i$ Ligne $i$ Ligne $i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Le composantes de la ligne $i$ sont toutes multipliées par $c$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

<u>Type 1</u>: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

$E_i(c) \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Ligne $i$      Ligne $i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Le composantes de la ligne $i$ sont toutes multipliées par $c$

$E_2(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

<u>Type 1</u>: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

Ligne $i$ Ligne $i$ Ligne $i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_i(c) \in \mathbb{R}^{m \times m}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Le composantes de la ligne $i$ sont toutes multipliées par $c$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

Type 1: $E_i(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en multipliant par $c$ la ligne $i$ de $I_m$ où $c$ est un nombre réel non nul.

Ligne $i$ Ligne $i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_i(c) \in \mathbb{R}^{m\times m}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ca_{i,1} & ca_{i,2} & \cdots & ca_{i,n-1} & ca_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ligne $i$

Le composantes de la ligne $i$ sont toutes multipliées par $c$

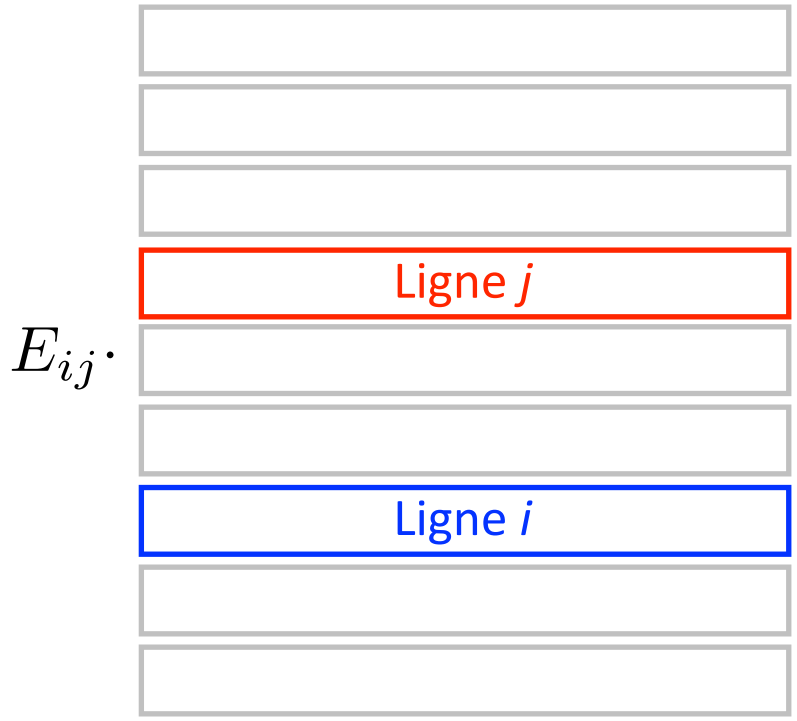
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

Type 2: $E_{ij}$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_m$.

# Matrices élémentaires

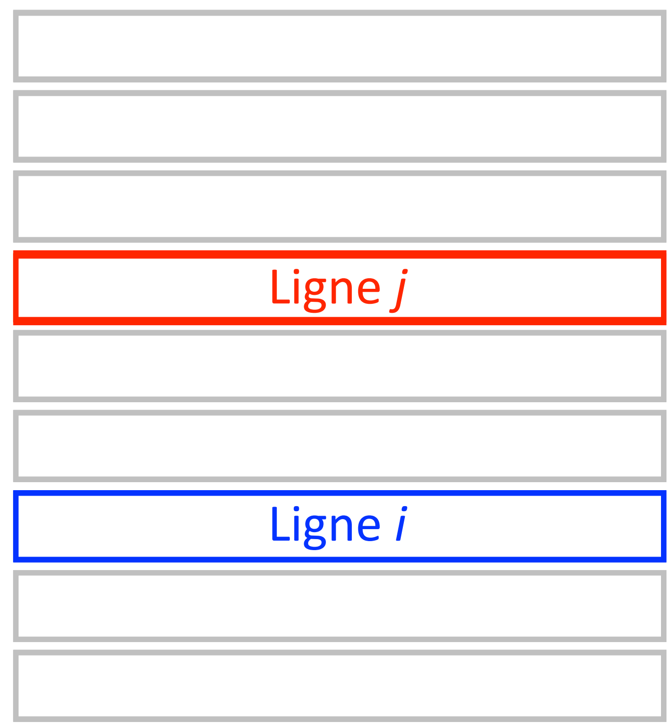
Type 2: $E_{ij}$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_m$.



# Matrices élémentaires

Type 2: $E_{ij}$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_m$.

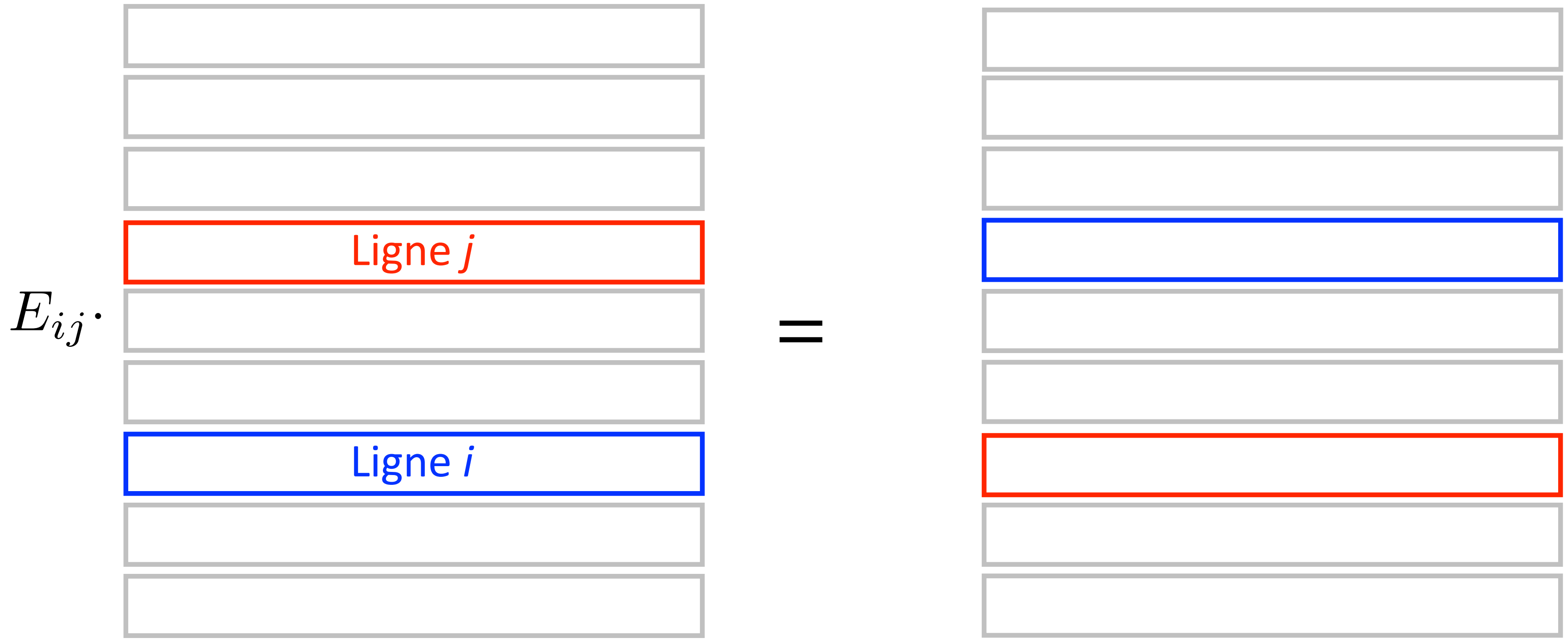
$E_{ij} \cdot$




$=$

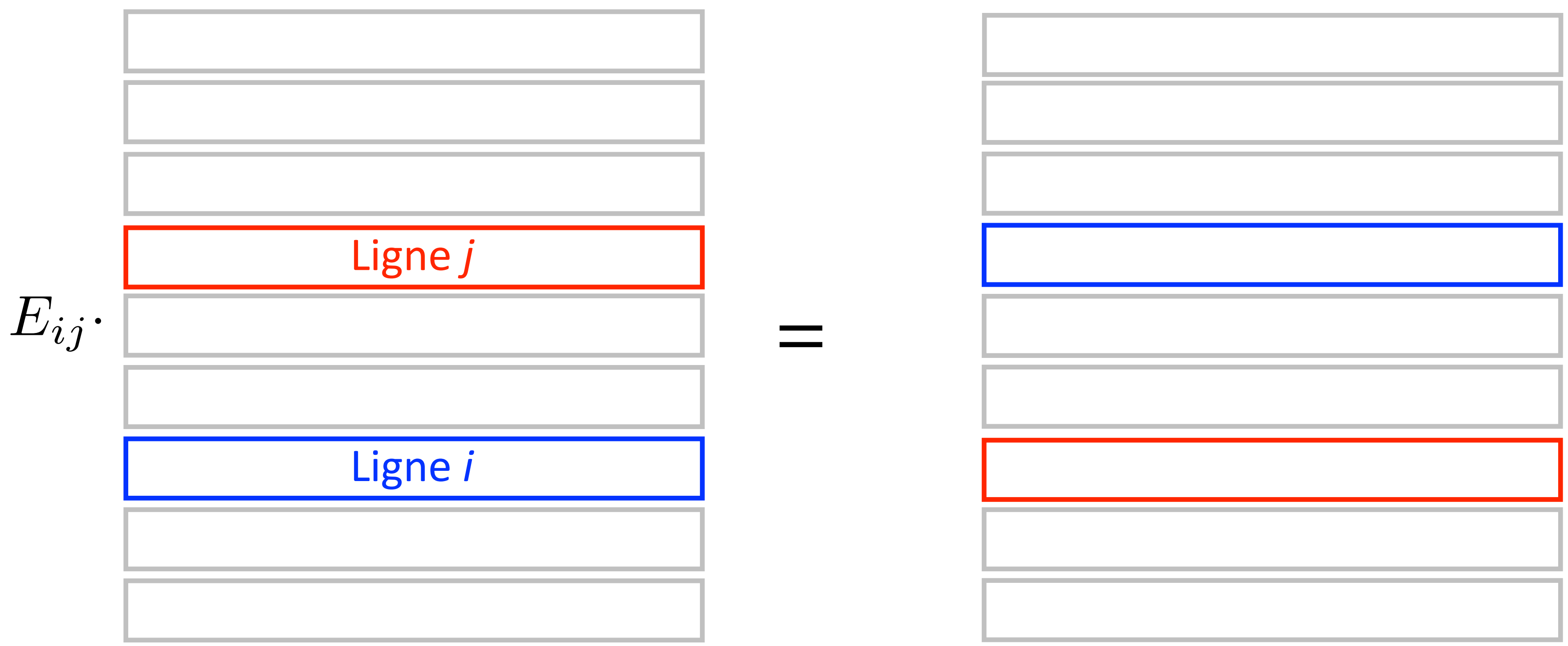
# Matrices élémentaires

Type 2: $E_{ij}$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_m$.



# Matrices élémentaires

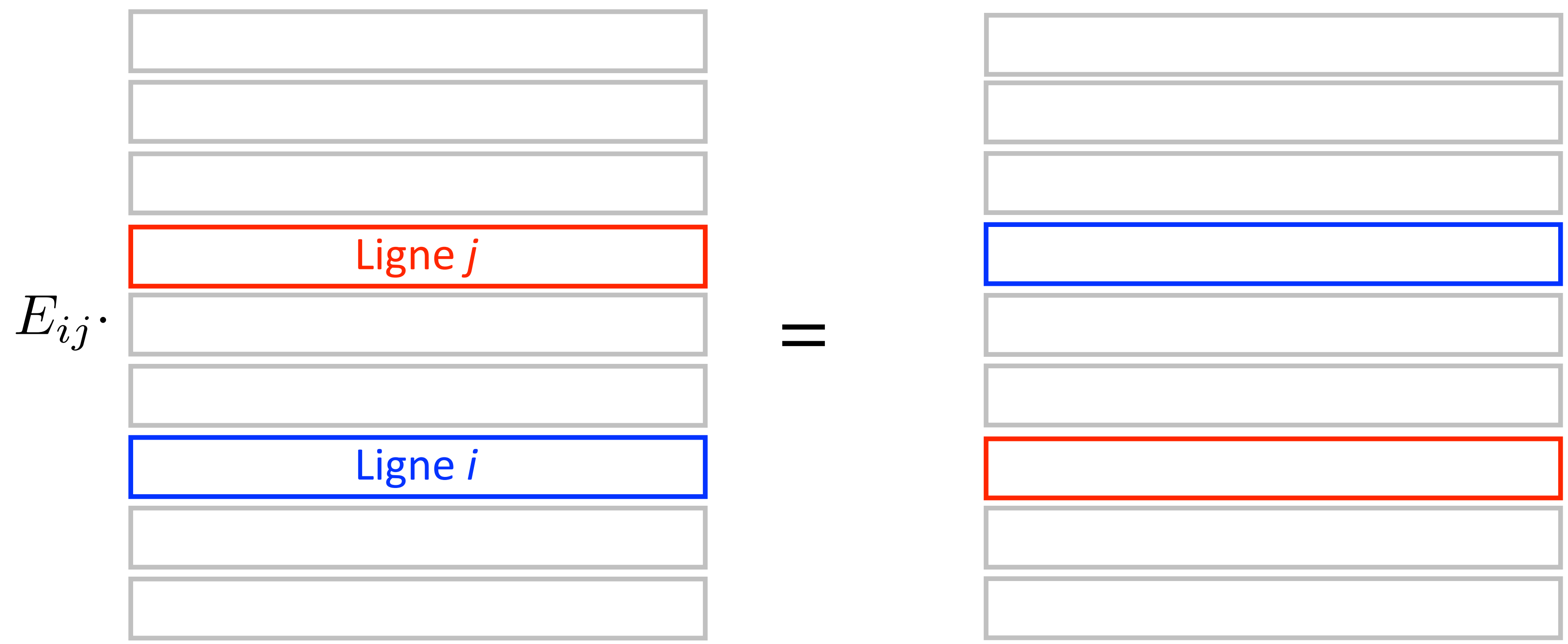
Type 2: $E_{ij}$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en permutant les $i$-ème et $j$-ème lignes de $I_m$.




$$\overset{E_{24}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

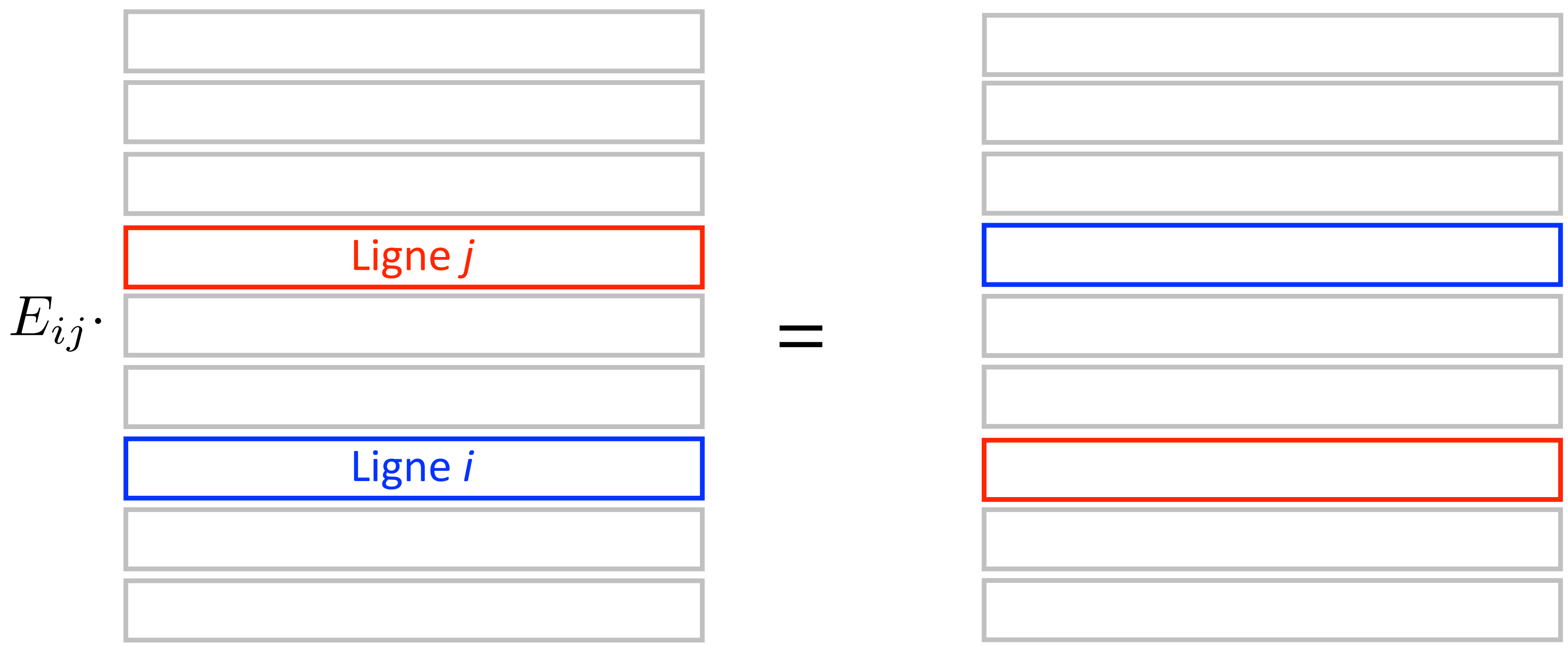
<u>Type 2</u>: $E_{ij}$ est la matrice de taille *m* x *m* obtenue en permutant les *i*-ème et *j*-ème lignes de $I_m$.




$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_{24}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

<u>Type 2</u>: $E_{ij}$ est la matrice de taille *m* x *m* obtenue en permutant les *i*-ème et *j*-ème lignes de $I_m$.



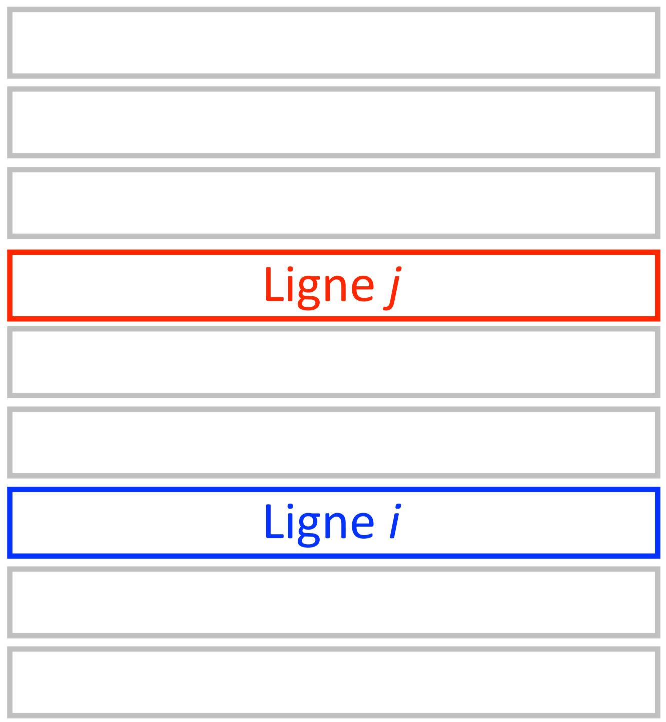

$$\overset{E_{24}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en mettant $c$ à la position $(i,j)$ de la matrice identité $I_m$.

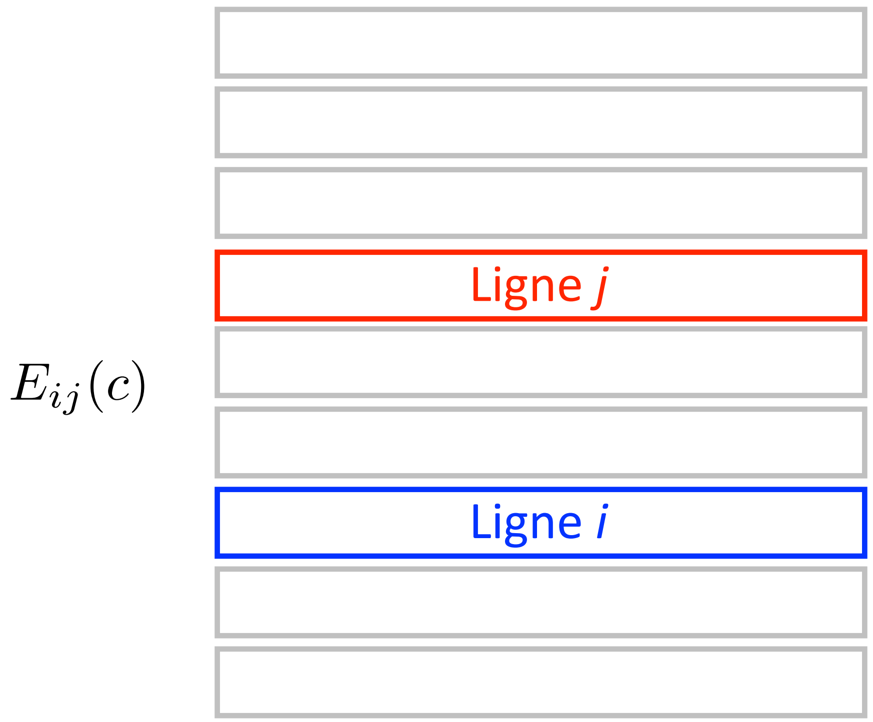
# Matrices élémentaires

<u>Type 3</u>: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en mettant $c$ à la position $(i,j)$ de la matrice identité $I_m$.



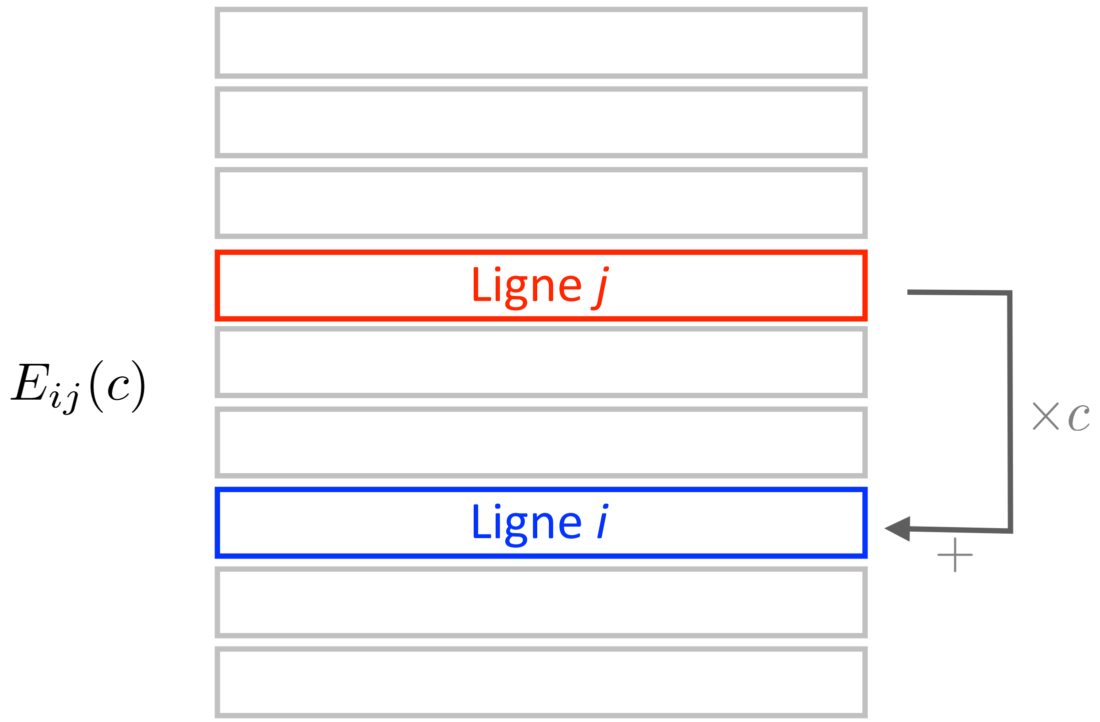
# Matrices élémentaires

<u>Type 3</u>: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en mettant $c$ à la position $(i,j)$ de la matrice identité $I_m$.



# Matrices élémentaires

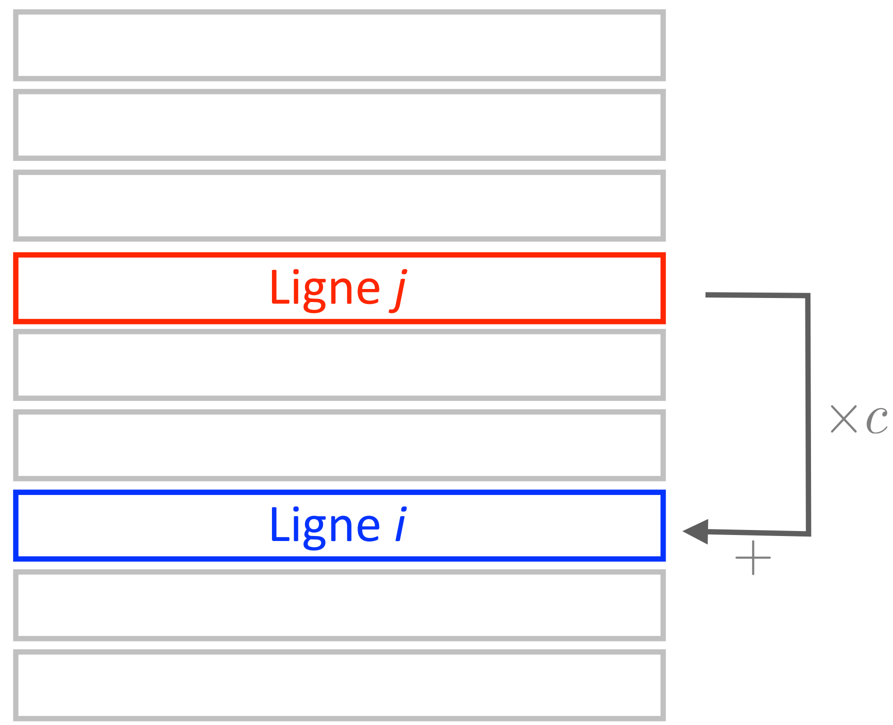
Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en mettant $c$ à la position $(i,j)$ de la matrice identité $I_m$.



# Matrices élémentaires

<u>Type 3</u>: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille *m* x *m* obtenue en mettant *c* à la position (*i*,*j*) de la matrice identité $I_m$.

$E_{ij}(c)$

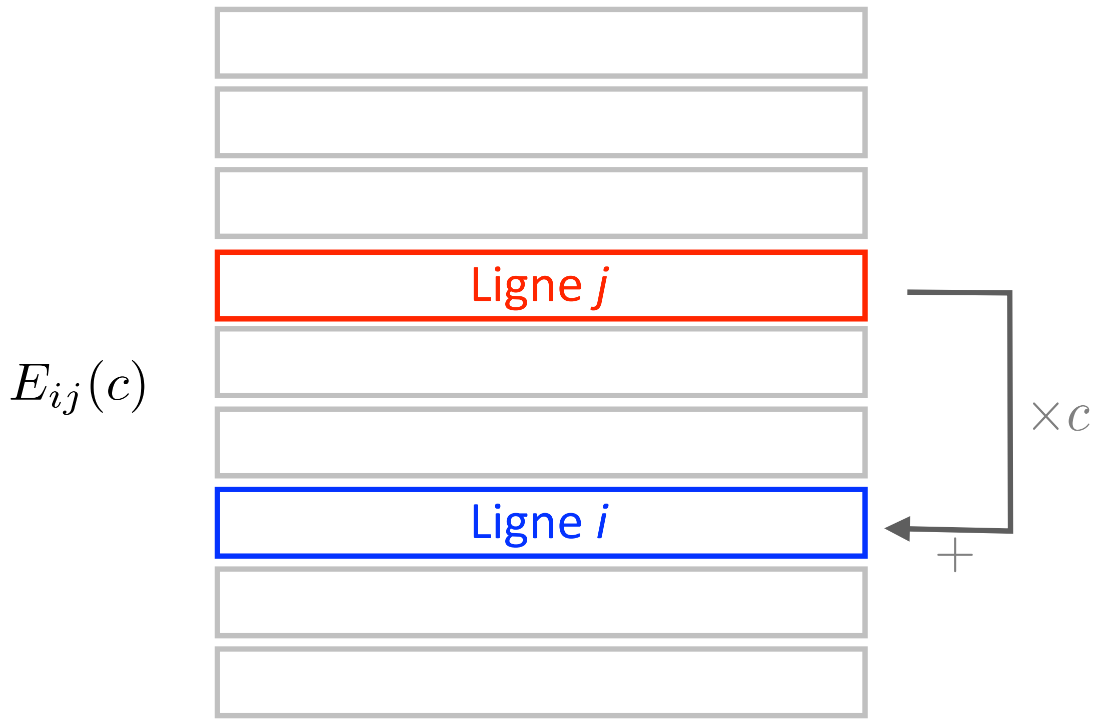



$$E_{21}(-1/2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires

<u>Type 3</u>: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille *m* x *m* obtenue en mettant *c* à la position (*i*,*j*) de la matrice identité $I_m$.



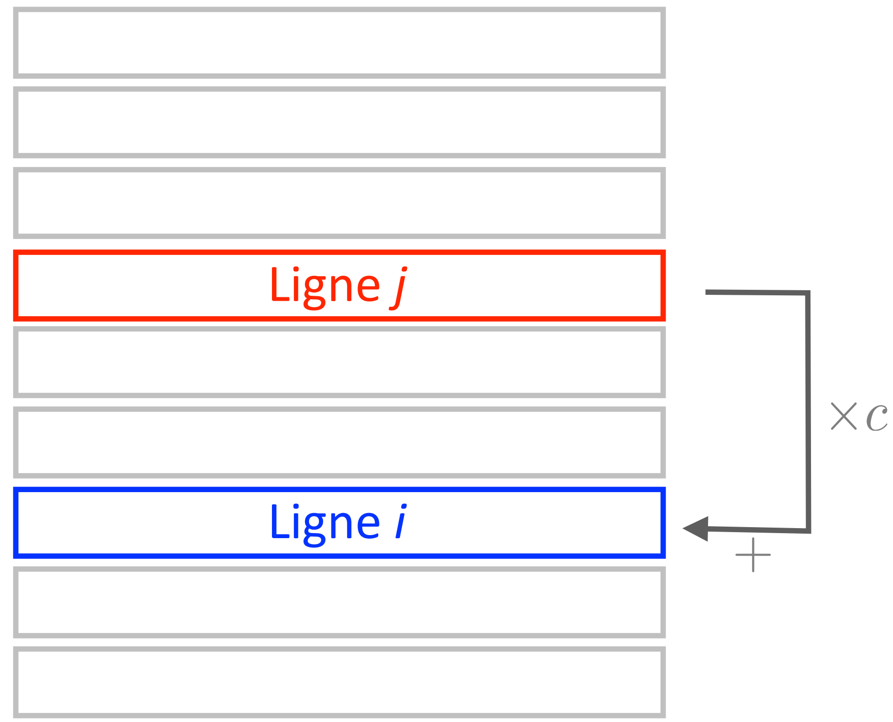

$E_{21}(-1/2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times(-1/2) \quad +$$

# Matrices élémentaires

Type 3: $E_{ij}(c)$ est la matrice de taille $m$ x $m$ obtenue en mettant $c$ à la position $(i,j)$ de la matrice identité $I_m$.

$E_{ij}(c)$




$E_{21}(-1/2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Les operations nécessaires pour calculer la forme échelonnée réduite d'une matrice donnée sont réalisées par la multiplication avec des matrices élémentaires.

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \times(-2) \quad +$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \times(-2) \quad +$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \quad +$$

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \; +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ + \end{matrix}$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 1/4$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \; +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad \times(-3)$$

$$E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad + \quad \times(-3) \quad \times(-1)$$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad + \quad \times(-3) \quad \times(-1)$$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad + \quad \times(-3) \quad \times(-1)$$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \times 1 \quad +$$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \times 1/4$$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad + \quad \times(-3) \quad \times(-1)$$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad + \quad \times 2$$

$$E_{12}(2)E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$\times 1$ $+$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=E_{32}(1)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$\times 1/4$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$+$ $+$ $\times(-3)$ $\times(-1)$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$+$ $\times 2$

$$E_{12}(2)E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

# Matrices élémentaires et la forme échelonnée

Example: Transformer $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ à la forme échelonnée réduite

$$E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times 1$ $+$

$$E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = E_{32}(1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\times 1/4$

$$E_4(1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$+$ $+$ $\times(-3)$ $\times(-1)$

$$E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$+$ $\times 2$

$$\boxed{E_{12}(2)E_{13}(-1)E_{23}(-3)E_3(-1/4)E_{32}(1)E_{31}(-2)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= A^{-1}$

# Calcul de l’inverse d’une matrice: exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

# Calcul de l’inverse d’une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{rrr} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Calcul de l'inverse d'une matrice: exemple

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ & & & \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# La transposé

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -1 & 6 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & -1 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & -2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\top = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -6 & 2 \\ -2 & -5 & -4 & -6 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $A$ et $m$ x $n$, alors $A^\mathsf{T}$ est $n$ x $m$.

Ligne $i$ de $A^\mathsf{T}$ est égal à la colonne $i$ de $A$.

# La transposé

# La transposé

Soient *A*,*B* des matrices.

(a) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(b) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad (cA)^\top = cA^\top$

(c) $\left(A^\top\right)^\top = A$

(d) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

(e) Si *A* est inversible, alors $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$

# La transposé

Soient *A*,*B* des matrices.

(a) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(b) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad (cA)^\top = cA^\top$

(c) $\left(A^\top\right)^\top = A$

(d) $(AB)^\top = B^\top A^\top$ ⚠

(e) Si *A* est inversible, alors $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$

# La transposé

Soient *A*,*B* des matrices.

(a) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(b) $\forall c \in \mathbb{R}: \quad (cA)^\top = cA^\top$

(c) $\left(A^\top\right)^\top = A$

(d) $(AB)^\top = B^\top A^\top$ ⚠

(e) Si *A* est inversible, alors $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1}$

Démonstration donnée pendent le cours.

# Caractérisation des matrices inversibles

# Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. Les propriétés suivantes sont équivalents

(a) $A$ est inversible

(b) $A$ est équivalente à la matrice identité de taille $n$

(c) $A$ admet $n$ position de pivot

(d) L'équation $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ admet que la solution triviale.

(e) Les colonnes de $A$ sone linéairement indépendants

(f) L'application linéaire associée à $A$ est injective

(g) Pour tout vecteur $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^n$ l'équation $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ admet au moins une solution

(h) Les colonnes de A engendrent $\mathbf{R}^n$

(i) L'application linéaire associée à $A$ est surjective

(j) Il existe une matrice $C$ carrée de taille $n$ telle que $CA=I_n$

(k) Il existe une matrice $D$ carrée de taille $n$ telle que $AD=I_n$

(l) $A^T$ est inversible