Valeurs propres

La diagonalisation: comme déjà vu

Théorème 18.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A, et poser $f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$ ou λ_1, …, λ_k sont différentes deux à deux, et $m_1, \ldots, m_k \geq 1$.

(1) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \leq n$

(2) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) = n$, donc il y a une matrice inversible P de taille n telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}^{m_1 \text{ fois}} & & & 0 \\ & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}}^{m_2 \text{ fois}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}}^{m_k \text{ fois}} \end{pmatrix}$$

Chaque valeur est répétée autant de fois que sa multiplicité

C'est-à-dire, A est similaire à une matrice diagonale

La diagonalisation: comme déjà vu

Similaire au Théorème 7, page 307 du livre

Théorème 18.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A, et poser $f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$ ou λ_1, …,λ_k sont différentes deux à deux, et $m_1,\ldots,m_k \geq 1$.

(1) On a $\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \leq n$

(2) Si $\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) = n$, donc il y a une matrice inversible P de taille n telle que

m_1 fois, m_2 fois, m_k fois

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & 0 & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Chaque valeur est répétée autant de fois que sa multiplicité

C'est-à-dire, A est similaire à une matrice diagonale

La diagonalisation

Corollaire 18.2: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A, et poser $f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}$ ou λ_1, …, λ_k sont différentes deux à deux, et $m_1, …, m_k \geq 1$. Donc, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) = n$

Consulter les notes manuscrites du cours de 21.11.16 pour la démonstration

La diagonalisation

Similaire au Théorème 5, page 303 du livre

<u>Corollaire 18.2</u>: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A, et poser $f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k}$ ou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont différentes deux à deux, et $m_1, \ldots, m_k \geq 1$. Donc, A est diagonalisable <u>si et seulement si</u> $\sum_{i=1}^{k} \dim \ker(A - \lambda_i I_n) = n$

Consulter les notes manuscrites du cours de 21.11.16 pour la démonstration

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

dim ker$(A - \lambda_i I_n) \geq 1$ pour chaque i car est une valeur propre.

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

dim ker(A - $\lambda_i I_n$) ≥ 1 pour chaque i car est une valeur propre.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A - \lambda_i I_n) \geq n$$

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

dim ker(A - $\lambda_i I_n$) ≥ 1 pour chaque i car est une valeur propre.

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \geq n$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \leq n$ grace au Théorème 18.1 (1).

La diagonalisation

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

dim ker(A - $\lambda_i I_n$) ≥ 1 pour chaque i car est une valeur propre.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \geq n$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) \leq n$ grace au Théorème 18.1 (1).

Alors, $\sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) = n \Rightarrow A$ est diagonalisable grace au théorème 18.1(2).

La diagonalisation

Similaire au Théorème 2, page 290 du livre

Corollaire 19.1: Soit A une matrice de format n x n sur un corps K, $f(x)$ le polynôme caractéristique de A. Si chaque racine de $f(x)$ est simple, c'est-à-dire, de multiplicité 1, donc A est diagonalisable.

Démonstration:

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de $f(x)$ (on en a n car chaque racine est simple)

$\dim \ker(A - \lambda_i I_n) \geq 1$ pour chaque i car est une valeur propre.

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A - \lambda_i I_n) \geq n$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A - \lambda_i I_n) \leq n$ grace au Théorème 18.1 (1).

Alors, $\sum_{i=1}^{n} \dim\ker(A - \lambda_i I_n) = n \Rightarrow A$ est diagonalisable grace au théorème 18.1(2).

Comment trouver la matrice P?

Première étape: Calculer les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ et leur multiplicité.

Comment trouver la matrice P?

Première étape: Calculer les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ et leur multiplicité.

Deuxième étape: Pour chaque λ_i, calculer une base de $\ker(A-\lambda_i I_n)$.

Comment trouver la matrice P?

Première étape: Calculer les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ et leur multiplicité.

Deuxième étape: Pour chaque λ_i, calculer une base de $\ker(A-\lambda_i I_n)$.

Troisième étape: Si $\sum_{i=1}^{k} \dim\ker(A-\lambda_i I_n) = n$, poser les vecteurs des bases trouver dans la deuxième étape dans une matrice *P*.

Exemple

Exercise 11, page 308 du livre

Si possible, diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (Conseil: les valeurs propres sont λ_1=-1 et λ_2 = 5.).

Exemple

Exercise 11, page 308 du livre

Si possible, diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (Conseil: les valeurs propres sont λ_1=-1 et λ_2 = 5.).

(1) Les valeurs propres sont déjà données.

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker($A-\lambda_i I_3$)

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -18/5 & 12/5 \\ 0 & 18/5 & -12/5 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -18/5 & 12/5 \\ 0 & 18/5 & -12/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -18/5 & 12/5 \\ 0 & 18/5 & -12/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -18/5 & 12/5 \\ 0 & 18/5 & -12/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: Etape 2

Exercise 11, page 308 du livre

(2) Trouver une base pour ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -18/5 & 12/5 \\ 0 & 18/5 & -12/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\dim\ker(A - \lambda_1 I_3) + \dim\ker(A - \lambda_2 I_3) = 2 + 1 = 3 \Longrightarrow$ Diagonalisable

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) P a comme colonnes les éléments des bases de $\ker(A-\lambda_i I_3)$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) P a comme colonnes les éléments des bases de $\ker(A-\lambda_i I_3)$

$$\ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) P a comme colonnes les éléments des bases de $\ker(A-\lambda_i I_3)$

$$\ker(A+I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) *P* a comme colonnes les éléments des bases de ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$\ker(A+I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow P = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) *P* a comme colonnes les éléments des bases de ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$\ker(A+I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow P = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & & \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) *P* a comme colonnes les éléments des bases de ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$\ker(A + I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - 5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow P = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

Exemple: Etape 3

Exercise 11, page 308 du livre

(3) *P* a comme colonnes les éléments des bases de ker(A-$\lambda_i I_3$)

$$\ker(A+I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-5I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow P = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2PP^{-1}AP$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^3P$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^3P$$

En général... $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^3P$$

En général… $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^8 = P^{-1}A^8P$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$(P^{-1}AP)^3 = (P^{-1}AP)^2(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2\underbrace{PP^{-1}}_{=I_2}AP = P^{-1}A^3P$$

En général... $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} = (P^{-1}AP)^8 = P^{-1}A^8P$$

$$\Longrightarrow \boxed{A^8 = P\begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix}P^{-1}}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \begin{pmatrix} 4-x & -3 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = -(4-x)(1+x) + 6 = x^2 - 3x + 2$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Calculer les valeurs propres

$$\det(A - xI_2) = \begin{pmatrix} 4-x & -3 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = -(4-x)(1+x)+6 = x^2-3x+2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 2, 1$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\implies \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 2I_2) = \left\langle \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \right) \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - I_2) = \left\langle \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \right) \right\rangle$$

$$\implies \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \right)^{-1} A \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Diagonaliser A si possible:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - 2I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \ker(A - I_2) = \left\langle \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} A \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Exemple

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

Exercise 1, page 307 du livre

$$A^8 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

$$A^8 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

$$A^8 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

$$A^8 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exercise 1, page 307 du livre

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.

$$A^8 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^8 & 0 \\ 0 & \lambda_2^8 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -(1+i) & -2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -(1+i) & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -(1+i) & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et en utilisant de la conjugaison complexe….

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -(1+i) & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et en utilisant de la conjugaison complexe….

$$\overline{A-(1+i)I_2} = \overline{A} - \overline{1+i}I_2 = A-(1-i)I_2 \sim \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Parfois les valeurs propres d'une matrice réelle ne sont pas réelles.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_2) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

$$\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i$$

Dans ce cas, la matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, même si elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$A - (1+i)I_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -(1+i) & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et en utilisant de la conjugaison complexe….

$$\overline{A - (1+i)I_2} = \overline{A} - \overline{1+i}I_2 = A - (1-i)I_2 \sim \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas?

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Remplacer la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Remplacer la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Remplacer la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow$$

Valeurs propres complexes

Est-ce que on peut trouver un remplacement pour la forme diagonale dans ce cas? Oui!

Cas $\mathbb{R}^{2x2}$:

- Remplacer le vecteur propre et sa conjugaison complexe par sa partie réelle et sa partie complexe.

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Remplacer la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda) & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & \mathrm{Re}(\lambda) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} & \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sans démonstration dans le cas général

Valeurs propres complexes

Théorème 9, page 321 du livre

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\mathrm{Re}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \ \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(1+i) & -\mathrm{Im}(1+i) \\ \mathrm{Im}(1+i) & \mathrm{Re}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -(1-i) & -(1+i) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sans démonstration dans le cas général

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 5 \\ 1 & -x & -9 \\ 0 & 1 & 5-x \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 5 \\ 1 & -x & -9 \\ 0 & 1 & 5-x \end{pmatrix}$$

$$= -x((-x)(5-x)+9) - (-5) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 5 \\ 1 & -x & -9 \\ 0 & 1 & 5-x \end{pmatrix}$$

$$= -x((-x)(5-x)+9) - (-5) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$$

1 est une racine du polynôme caractéristique

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 5 \\ 1 & -x & -9 \\ 0 & 1 & 5-x \end{pmatrix}$$

$$= -x((-x)(5-x)+9) - (-5) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$$

1 est une racine du polynôme caractéristique

$$(-x^3 + 5x^2 - 9x + 5) \div (1 - x) = x^2 - 4x + 5$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 5 \\ 1 & -x & -9 \\ 0 & 1 & 5-x \end{pmatrix}$$

$$= -x((-x)(5-x)+9) - (-5) = -x^3 + 5x^2 - 9x + 5$$

1 est une racine du polynôme caractéristique

$$(-x^3 + 5x^2 - 9x + 5) \div (1-x) = x^2 - 4x + 5 \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2+i, \lambda_3 = \overline{\lambda_2} = 2 - i$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & -3-4i & -13-9i \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & -3-4i & -13-9i \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & -3-4i & -13-9i \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & -3-4i & -13-9i \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A - (2+i)I_3 = \begin{pmatrix} -(2+i) & 0 & 5 \\ 1 & -(2+i) & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -(2+i) & -9 \\ -(2+i) & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & -3-4i & -13-9i \\ 0 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2-i & -9 \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 1 & 3-i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \overline{\begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 2-i & 2+i \\ -4 & -3+i & -3-i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & 2+i \\ -4 & & -3-i \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

Remplacer par
la partie
réelle

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 2-i & 2+i \\ -4 & -3+i & -3-i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \\ -4 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \\ -4 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i) \\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 2-i & 2+i \\ -4 & -3+i & -3-i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i) \\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\ker(A-I_3)=\left\langle\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}\right\rangle \qquad \ker(A-(2+i)I_3)=\left\langle\begin{pmatrix}2-i\\-3+i\\1\end{pmatrix}\right\rangle \qquad \ker(A-(2-i)I_3)=\left\langle\begin{pmatrix}2+i\\-3-i\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$P:=\begin{pmatrix}5 & 2-i & 2+i\\ -4 & -3+i & -3-i\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \implies P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 2+i & 0\\ 0 & 0 & 2-i\end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i)\\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$Q:=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ -4 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \implies Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i) \\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-(2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A-(2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & 2-i & 2+i \\ -4 & -3+i & -3-i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i) \\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale en blocs

Exemple: cas $\mathbb{R}^{3x3}$

$$\ker(A - I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2+i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker(A - (2-i)I_3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$P := \begin{pmatrix} 5 & \boxed{\begin{matrix} 2-i \\ -3+i \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2+i \\ -3-i \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

Remplacer par la partie réelle

Remplacer par la partie imaginaire du deuxième vecteur

Remplacer par $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(2+i) & -\mathrm{Im}(2+i) \\ \mathrm{Im}(2+i) & \mathrm{Re}(2+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale en blocs

Sans démonstration dans le cas général

Les endomorphisms

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathsf{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathsf{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

$$[\mathsf{T}(\boldsymbol{v})]_{\mathfrak{B}} = [\mathsf{T}]_{\mathfrak{B}}\ [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$$

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

$$[\mathrm{T}(\boldsymbol{v})]_{\mathfrak{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}} \; [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$$

Définition 19.1: $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ est appelée *la matrice* de T par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

$$[\mathrm{T}(\boldsymbol{v})]_{\mathfrak{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}} \, [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$$

Définition 19.1: $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ est appelée *la matrice* de T par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

$$[\mathrm{T}(\boldsymbol{v})]_{\mathfrak{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}\ [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$$

Définition 19.1: $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ est appelée *la matrice* de T par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}_1) &= t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{b}_n \\ T(\mathbf{b}_2) &= t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ T(\mathbf{b}_n) &= t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{b}_n \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Les endomorphisms et la semblance

Soit V un espace vectoriel sur le corps K, et soit $\mathfrak{B}$ une base de V. De plus, soit T un endomorphism de V, c'est-à-dire, T est une application linéaire de V à V.

Soit $[\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$ la représentation du vecteur $\boldsymbol{v}$ de V par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

Selon le cours de 02.11.2016 il y a une matrice $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ de taille n x n telle que

$$[\mathrm{T}(\boldsymbol{v})]_{\mathfrak{B}} = [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}} \; [\boldsymbol{v}]_{\mathfrak{B}}$$

Définition 19.1: $[\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}}$ est appelée *la matrice* de T par rapport à la base $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B} = \{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$

⚠ Les coefficients sont transposés

$$\begin{aligned} T(\mathbf{b}_1) &= t_{11}\mathbf{b}_1 + t_{21}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{b}_n \\ T(\mathbf{b}_2) &= t_{12}\mathbf{b}_1 + t_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{b}_n \\ &\vdots \\ T(\mathbf{b}_n) &= t_{1n}\mathbf{b}_1 + t_{2n}\mathbf{b}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{b}_n \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{T}]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

T: $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

T: $\mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

T: $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x \Rightarrow [T(a_0+a_1x+a_2x^2)]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x \Rightarrow [T(a_0+a_1x+a_2x^2)]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[T]_{\mathfrak{B}}\,[a_0+a_1x+a_2x^2]_{\mathfrak{B}}$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x \quad \Rightarrow \quad [T(a_0+a_1x+a_2x^2)]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathfrak{B}}\,[a_0+a_1x+a_2x^2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

T: $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x \;\Rightarrow\; [T(a_0+a_1x+a_2x^2)]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathfrak{B}}\,[a_0+a_1x+a_2x^2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

Exemple 2, page 311 du livre

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x$ par rapport à la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2\}$

$T(1) = T(1+0x+0x^2) = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$T(x) = T(0+1x+0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2$

$T(x^2) = T(0+0x+1x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_1+2a_2x \;\Rightarrow\; [T(a_0+a_1x+a_2x^2)]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

=

$$[T]_{\mathfrak{B}}\,[a_0+a_1x+a_2x^2]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Changement de base

Changement de base

$\boxed{V}$

Changement de base

$$\boxed{V} \xrightarrow{\quad T \quad} \boxed{V}$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{V} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & \boxed{V} \\
\boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}} &
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{V} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & \boxed{V} \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
\boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] & \boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}} \\
\boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{C}} &
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{V} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & \boxed{V} \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
\boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & \boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{B}} \\
\boxed{V \text{ par rapport à } \mathfrak{C}} &
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}"] & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C}
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "{[\,.\,]_{\mathfrak{B}}}"] & & V \arrow[d, "{[\,.\,]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

$[T]_{\mathfrak{B}} =$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \qquad\qquad P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}$$

Changement de base

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rrr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rrr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = \qquad [T]_{\mathfrak{C}}\; P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}$$

Changement de base

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[r, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

$$[T]_{\mathfrak{B}} = P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}} \, [T]_{\mathfrak{C}} \, P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}$$

Changement de base

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rrr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rrr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathfrak{B}} &= P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}\ [T]_{\mathfrak{C}}\ P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}} \\
&= P^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}\ [T]_{\mathfrak{C}}\ P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}
\end{aligned}$$

Changement de base

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] & & V \arrow[d, "{[.]_{\mathfrak{B}}}"] \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{B}}}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}"] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{B} \\
V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[rr, "{[T]_{\mathfrak{C}}}"'] & & V \text{ par rapport à } \mathfrak{C} \arrow[u, "P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathfrak{B}} &= P_{\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}}\ [T]_{\mathfrak{C}}\ P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}} \\
&= P^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}\ [T]_{\mathfrak{C}}\ P_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}}
\end{aligned}$$

La relation de la semblance correspond à un changement de base!