Espaces vectoriels

Espaces vectoriels (définition abstraite)

Un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$ est un ensemble V avec deux applications $+: V \times V \to V$, appelé *l'addition*, et $\cdot: \mathbb{R} \times V \to V$, appelé *la multiplication scalaire*, qui vérifie les propriétés suivantes:

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés des *vecteurs*

L'espace $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$

L’espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{en général} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \qquad \text{en général} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

- L'addition est définie composante par composante

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \qquad \text{en général} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

- L'addition est définie composante par composante

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{en général} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

- L'addition est définie composante par composante

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

- La multiplication scalaire est définie composante par composante

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \qquad \text{en général} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

- L'addition est définie composante par composante

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

- La multiplication scalaire est définie composante par composante

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

- Les éléments sont des colonnes avec deux composantes

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{en général} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

- L'addition est définie composante par composante

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$

- La multiplication scalaire est définie composante par composante

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

Est-ce que $\mathbb{R}^2$ avec l'addition et la multiplication scalaire défini au-dessus est un espace vectoriel?

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix} =$$

Commutativité de l'addition en $\boldsymbol{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** $\in$ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** $\in$ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** $\in$ *V* telle que pour chaque ***v*** $\in$ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* $\in \mathbb{R}$ et ***u, v*** $\in$ *V* vérifient *c*$\cdot$(***u+v***)=*c*$\cdot$***u*** + *c*$\cdot$***v***

(e) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient *c*$\cdot$(*d*$\cdot$***u***) = (*cd*)$\cdot$***u***

(f) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient (*c+d*)$\cdot$***u*** = *c*$\cdot$***u*** + *d*$\cdot$***u***

(g) Chaque ***u*** $\in$ *V* vérifie 1$\cdot$***u*** = ***u***

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Commutativité de l'addition en $\boldsymbol{R}^2$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$
(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$
(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$
(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$
(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$
(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∈ *V* vérifient ***u***+***v***=***v***+***u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∈ *V* vérifient ***u***+(***v***+***w***)=(***u***+***v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∈ *V* telle que pour chaque ***v*** ∈ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∈ *V* vérifient *c*·(***u***+***v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∈ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u***+***v***=***v***+***u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v***+***w***)=(***u***+***v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u***+***v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** $\in$ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** $\in$ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** $\in$ *V* telle que pour chaque ***v*** $\in$ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* $\in \mathbb{R}$ et ***u, v*** $\in$ *V* vérifient *c*$\cdot$(***u+v***)=*c*$\cdot$***u*** + *c*$\cdot$***v***

(e) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient *c*$\cdot$(*d*$\cdot$***u***) = (*cd*)$\cdot$***u***

(f) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient (*c+d*)$\cdot$***u*** = *c*$\cdot$***u*** + *d*$\cdot$***u***

(g) Chaque ***u*** $\in$ *V* vérifie 1$\cdot$***u*** = ***u***

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c+d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} =$$

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c+d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} =$$

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c+d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\boldsymbol{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\boldsymbol{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** $\in$ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** $\in$ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** $\in$ *V* telle que pour chaque ***v*** $\in$ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* $\in \mathbb{R}$ et ***u, v*** $\in$ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** $\in$ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de l'addition

$$\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} =$$

L’espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Définition de l’addition

$$\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha c \\ \alpha b + \alpha d \end{pmatrix} =$$

Définition de la multiplication scalaire

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*•(***u+v***)=*c*•***u*** + *c*•***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*•(*d*•***u***) = (*cd*)•***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c+d*)•***u*** = *c*•***u*** + *d*•***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1•***u*** = ***u***

Définition de l'addition

Définition de l'addition

$$\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha c \\ \alpha b + \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha c \\ \alpha d \end{pmatrix} =$$

Définition de la multiplication scalaire

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∈ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∈ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∈ *V* telle que pour chaque ***v*** ∈ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∈ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∈ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$\alpha\cdot\left(\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}\right) \overset{\text{Définition de l'addition}}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix} a+c \\ b+d\end{pmatrix} \underset{\text{Définition de la multiplication scalaire}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha c \\ \alpha b+\alpha d\end{pmatrix} \overset{\text{Définition de l'addition}}{=} \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha c \\ \alpha d\end{pmatrix} \overset{\text{Définition de la multiplication scalaire}}{=}$$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∈ *V* vérifient ***u***+***v***=***v***+***u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∈ *V* vérifient ***u***+(***v***+***w***)=(***u***+***v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∈ *V* telle que pour chaque ***v*** ∈ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∈ *V* vérifient *c*·(***u***+***v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∈ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∈ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∈ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$\alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

algolma laboratoire d'algorithmique laboratoire de mathématiques algorithmiques

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** $\in$ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** $\in$ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** $\in$ *V* telle que pour chaque ***v*** $\in$ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* $\in \mathbb{R}$ et ***u, v*** $\in$ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** $\in$ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de la multiplication scalaire

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a \\ (\alpha+\beta)b \end{pmatrix} =$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de la multiplication scalaire

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a \\ (\alpha+\beta)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a \\ \beta b \end{pmatrix} =$$

Définition de l'addition

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** $\in$ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** $\in$ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** $\in$ *V* telle que pour chaque ***v*** $\in$ *V*: **0**+***v=v***

(d) Chaque *c* $\in \mathbb{R}$ et ***u, v*** $\in$ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* $\in \mathbb{R}$ et ***u*** $\in$ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** $\in$ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

Définition de la multiplication scalaire

Définition de l'addition et de la multiplication scalaire

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a \\ (\alpha+\beta)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a \\ \beta b \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Définition de l'addition

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque ***u, v*** ∊ *V* vérifient ***u+v=v+u***

(b) Chaque ***u, v, w*** ∊ *V* vérifient ***u***+(***v+w***)=(***u+v***)+***w***

(c) il y a un élément **0** ∊ *V* telle que pour chaque ***v*** ∊ *V*: **0**+***v***=***v***

(d) Chaque *c* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u, v*** ∊ *V* vérifient *c*·(***u+v***)=*c*·***u*** + *c*·***v***

(e) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient *c*·(*d*·***u***) = (*cd*)·***u***

(f) Chaque *c,d* ∊ $\mathbb{R}$ et ***u*** ∊ *V* vérifient (*c*+*d*)·***u*** = *c*·***u*** + *d*·***u***

(g) Chaque ***u*** ∊ *V* vérifie 1·***u*** = ***u***

$$(\alpha+\beta)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\cdot\boldsymbol{u} + c\cdot\boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c\cdot(d\cdot\boldsymbol{u}) = (cd)\cdot\boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d)\cdot\boldsymbol{u} = c\cdot\boldsymbol{u} + d\cdot\boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

L'espace $\mathbb{R}^2$

(a) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(b) Chaque $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ vérifient $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(c) il y a un élément $\mathbf{0} \in V$ telle que pour chaque $\boldsymbol{v} \in V$: $\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

(d) Chaque $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ vérifient $c \cdot (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c \cdot \boldsymbol{u} + c \cdot \boldsymbol{v}$

(e) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $c \cdot (d \cdot \boldsymbol{u}) = (cd) \cdot \boldsymbol{u}$

(f) Chaque $c,d \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{u} \in V$ vérifient $(c+d) \cdot \boldsymbol{u} = c \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot \boldsymbol{u}$

(g) Chaque $\boldsymbol{u} \in V$ vérifie $1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Définition de la multiplication scalaire

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a \\ 1b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique

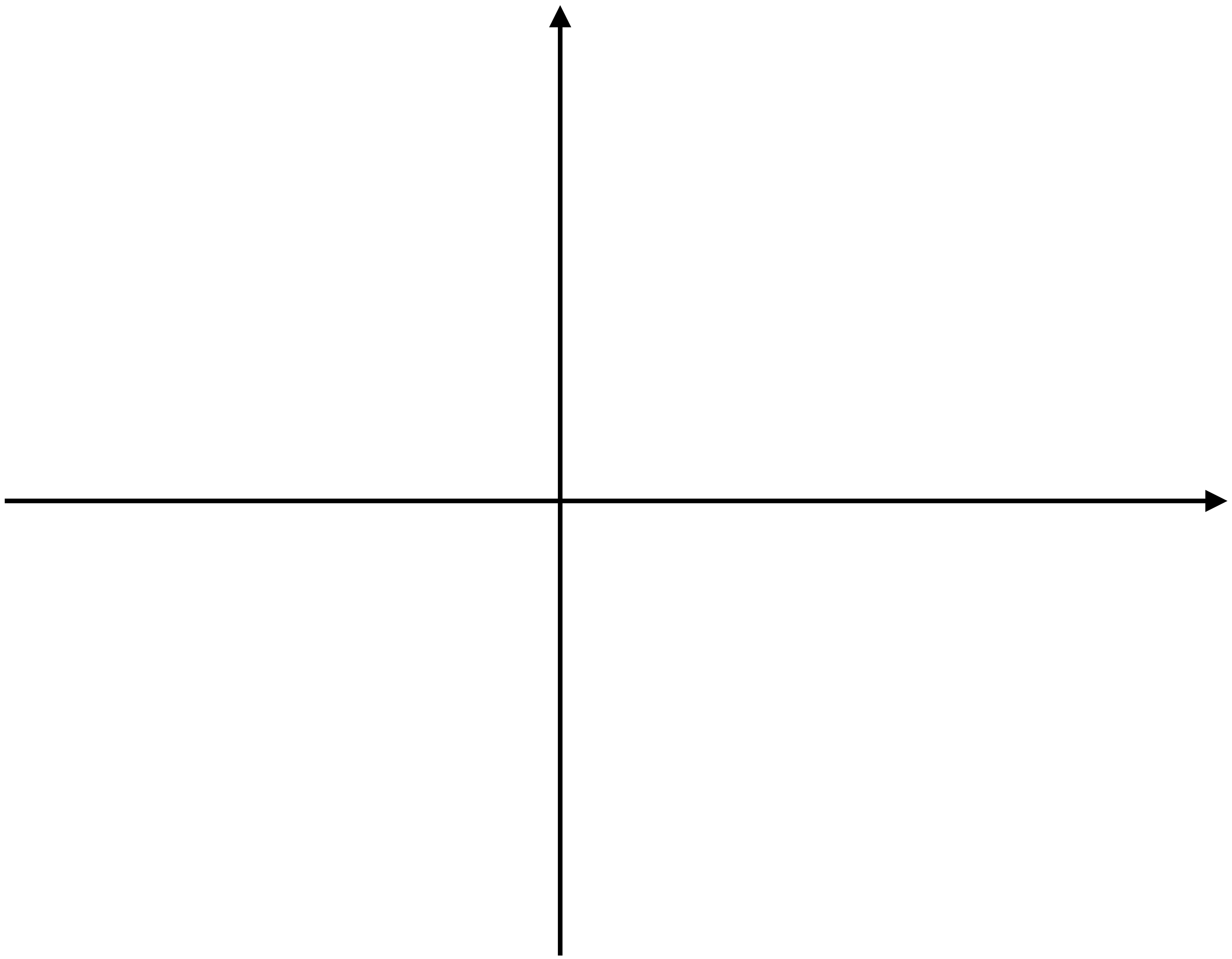
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

L’interprétation géométrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow$$

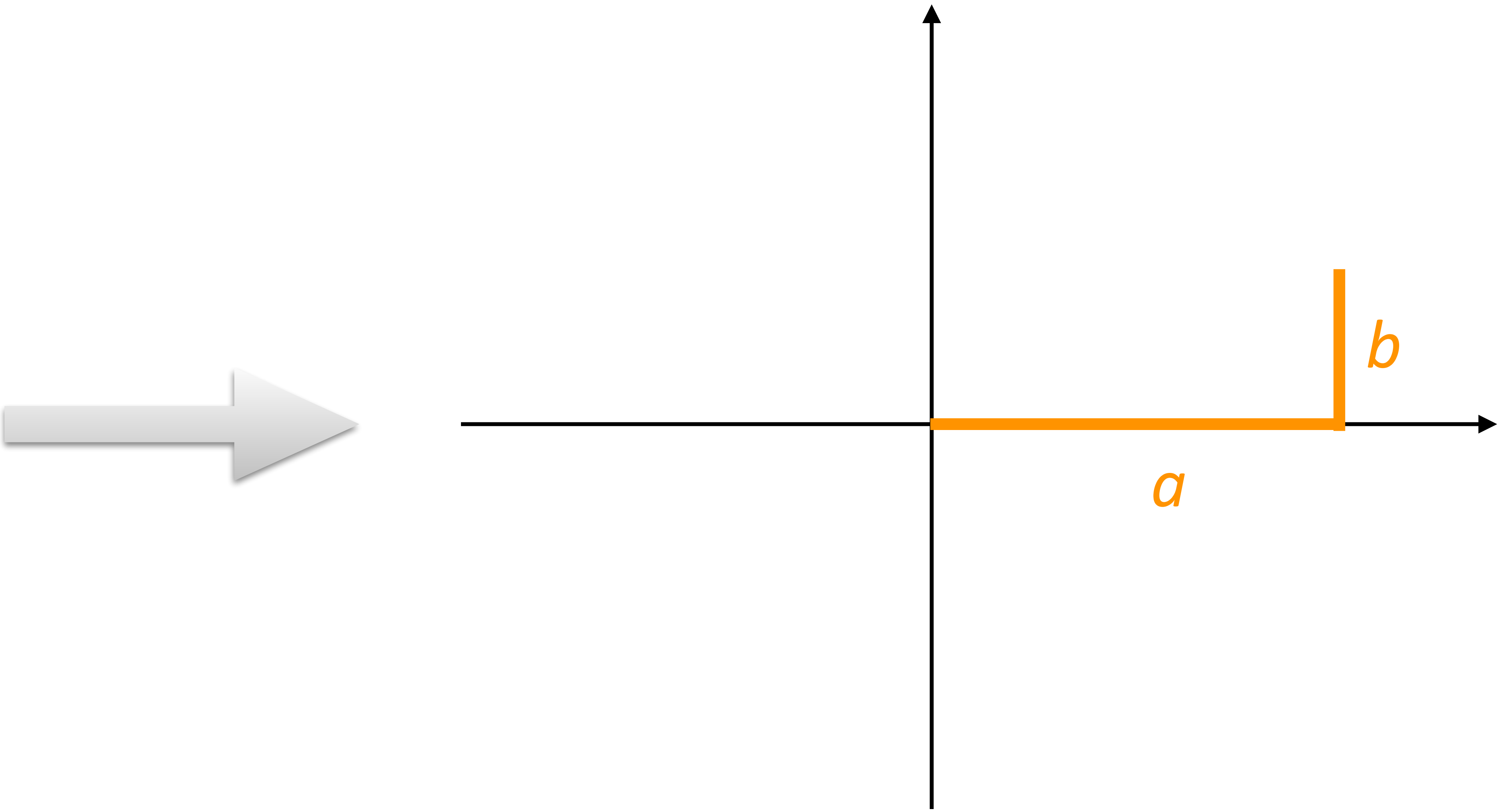
L'interprétation géométrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



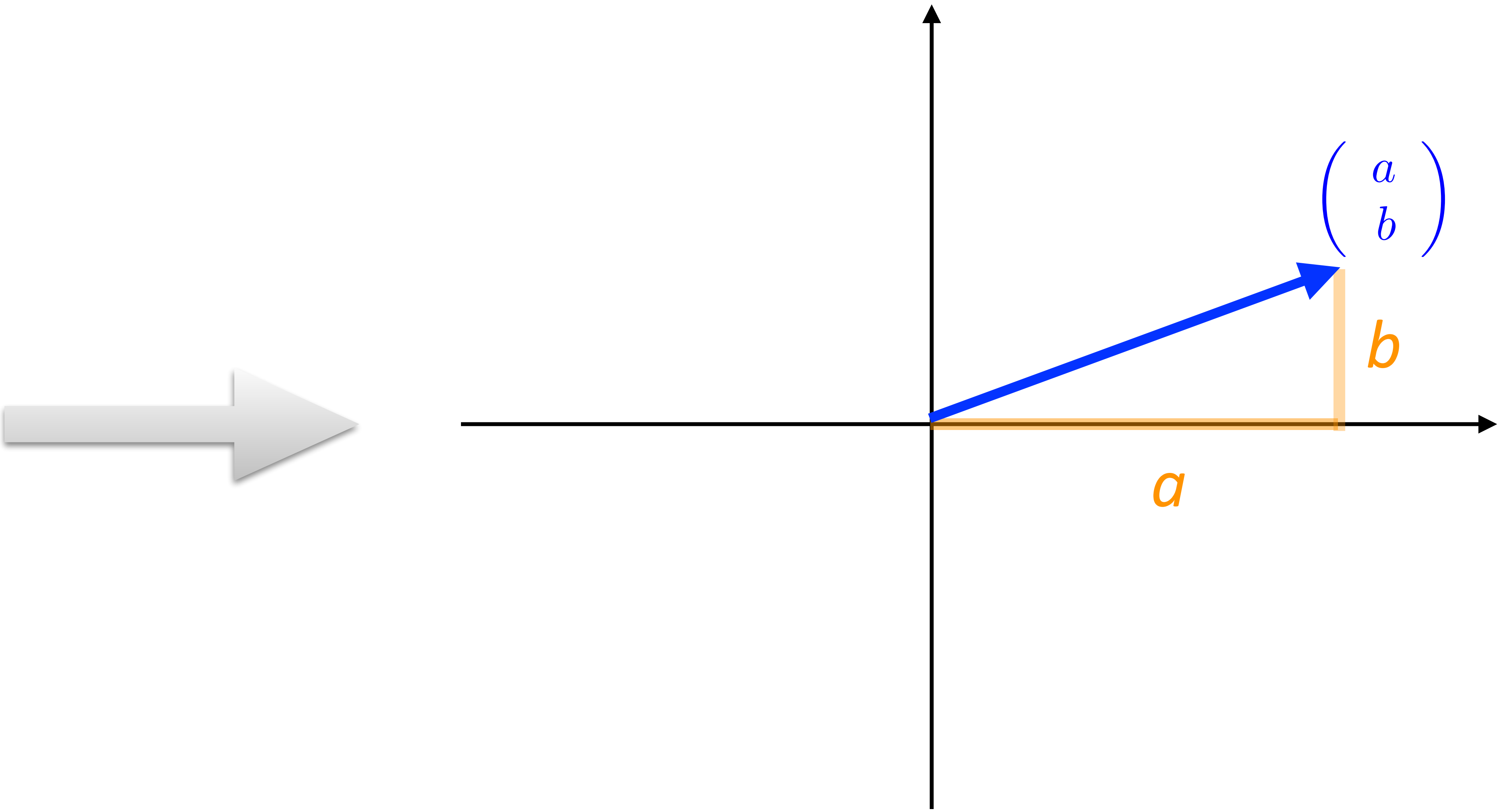
L'interprétation géométrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



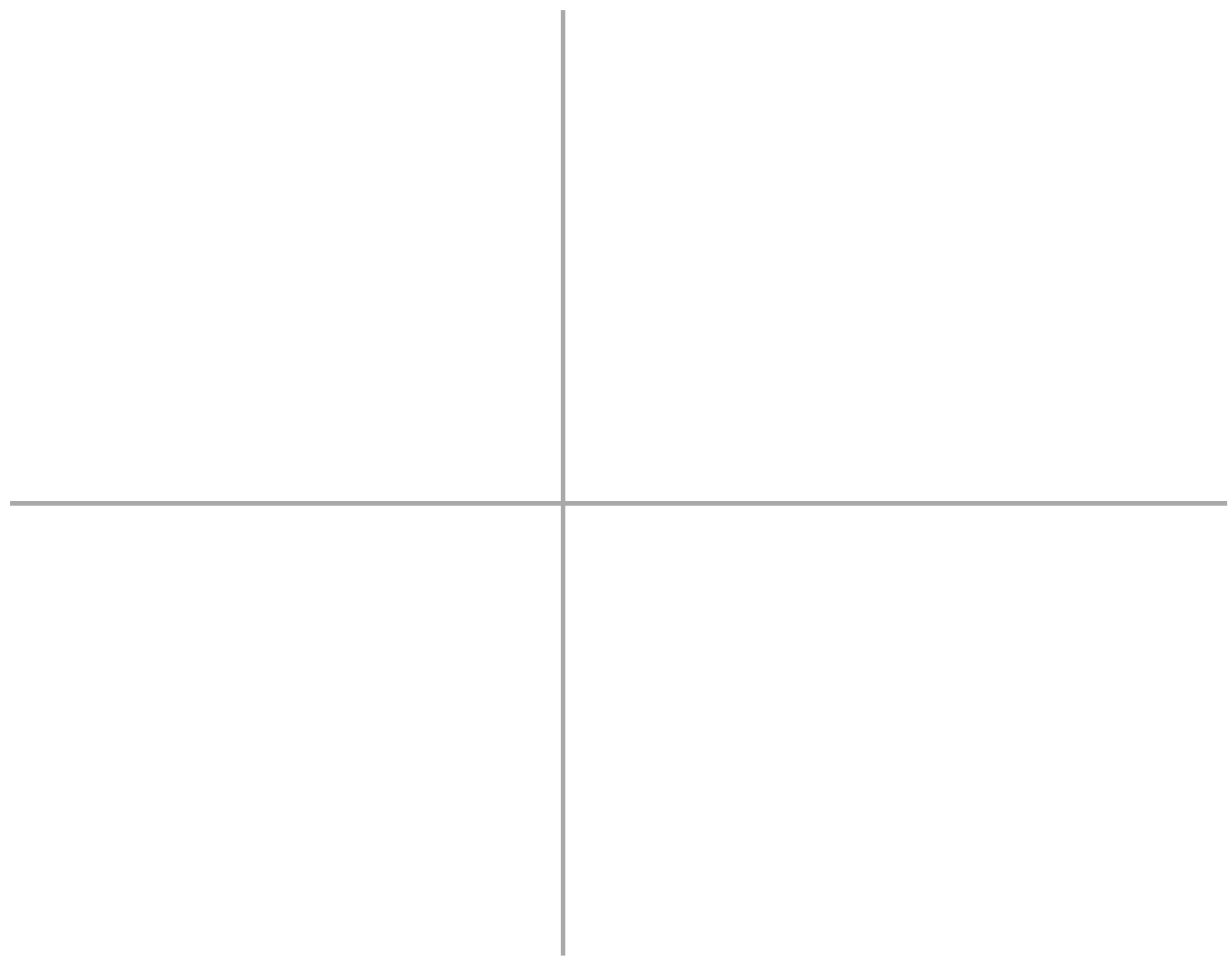
L'interprétation géométrique

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



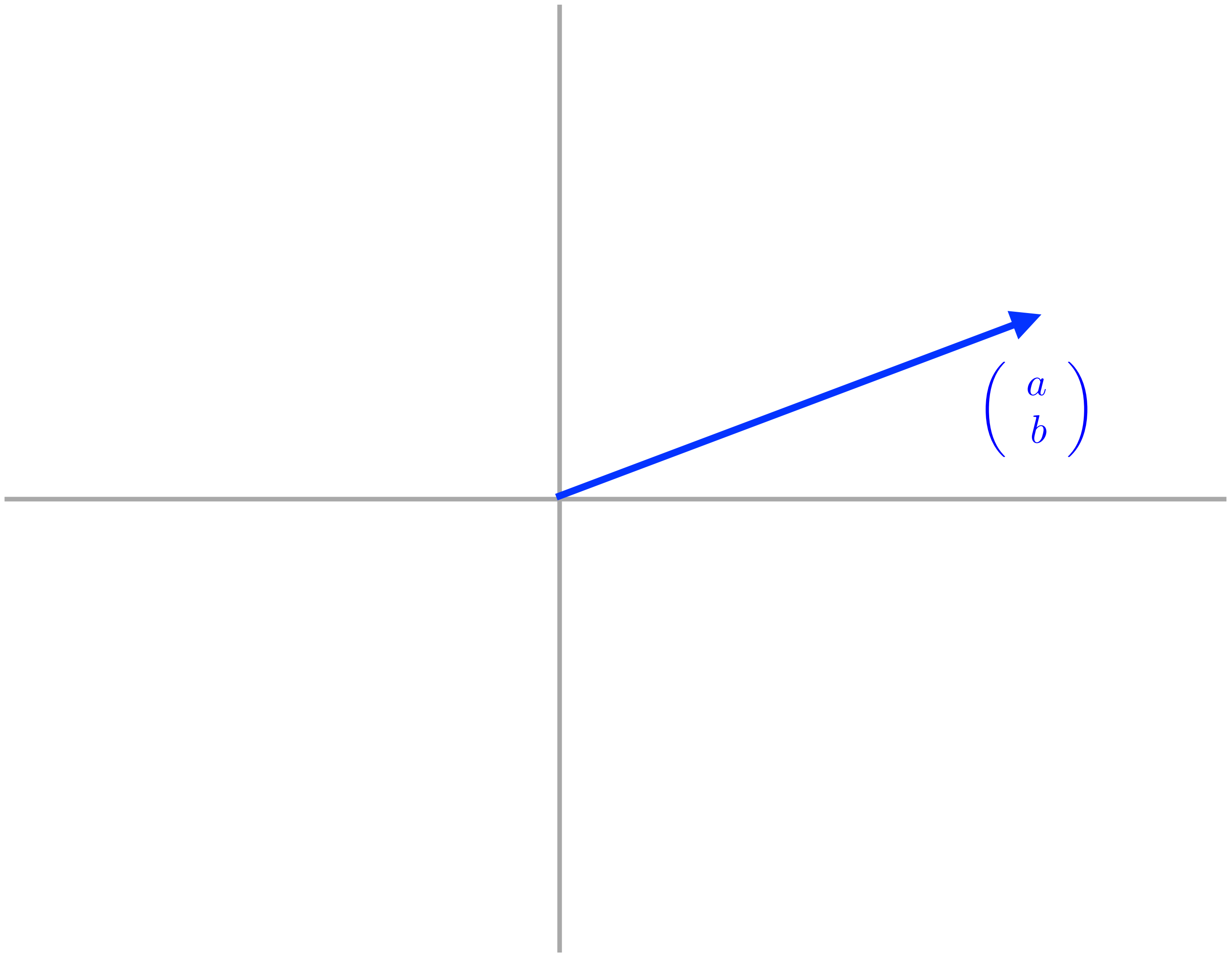
Interprétation géométrique de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$



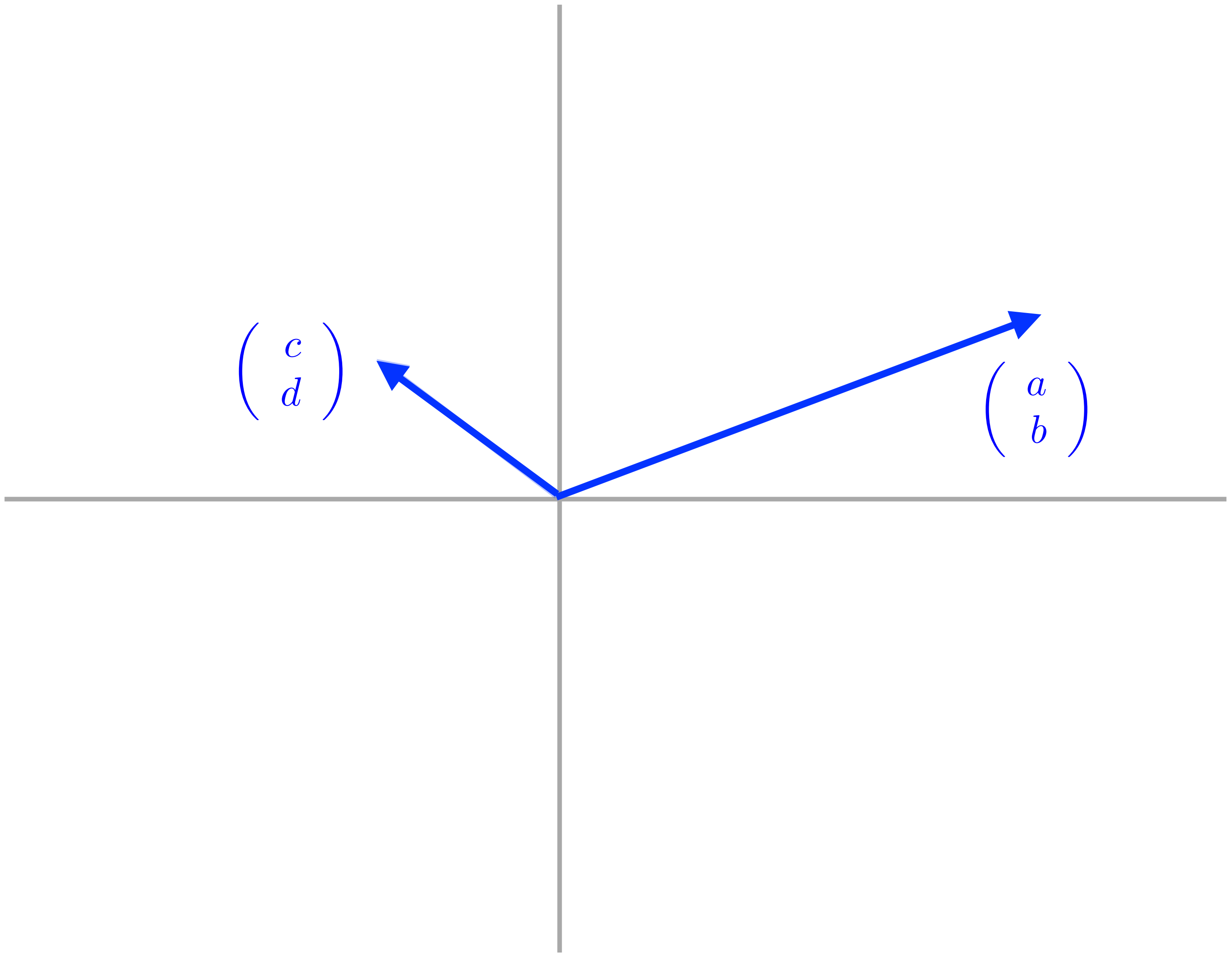
Interprétation géométrique de l’addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$



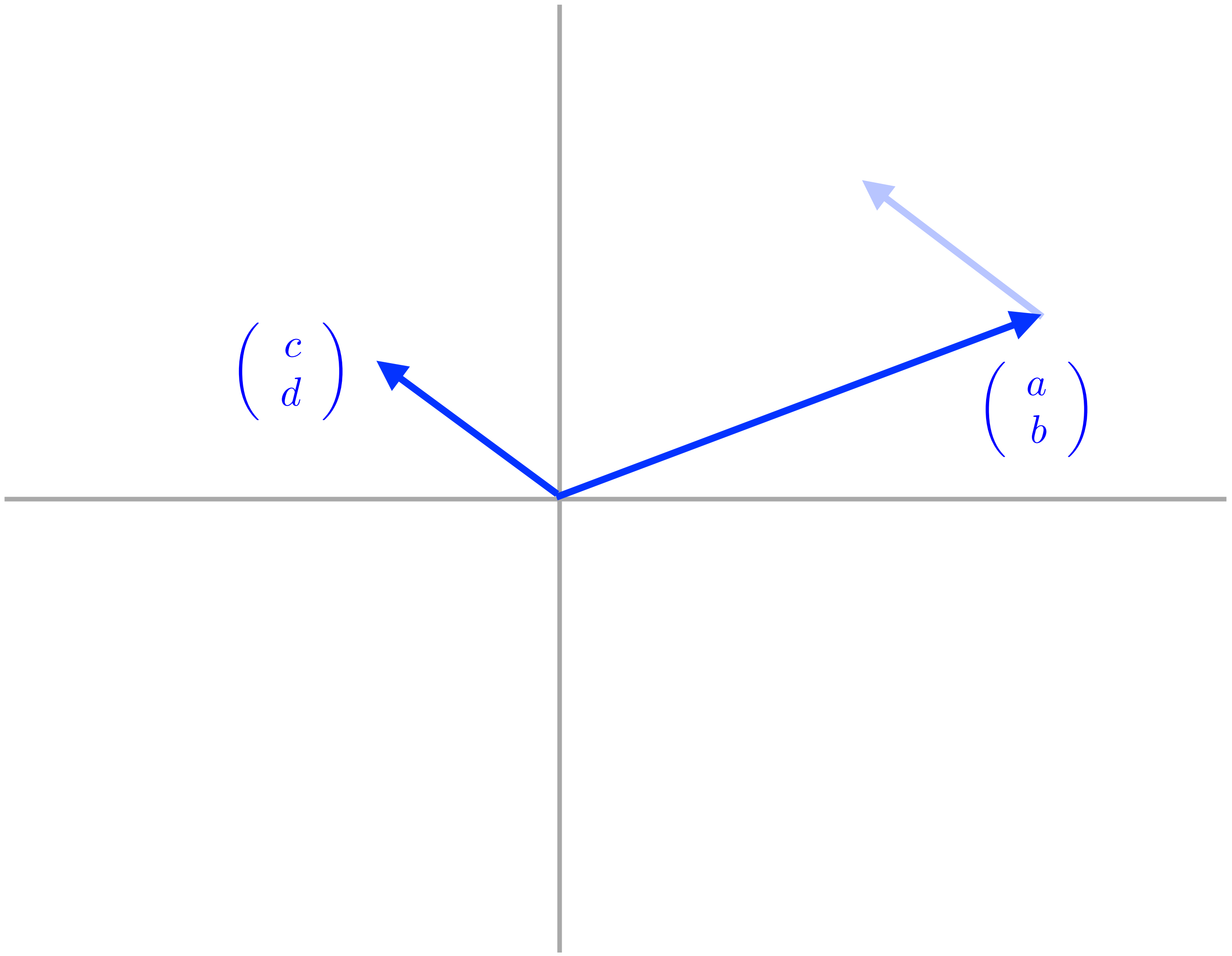
Interprétation géométrique de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$



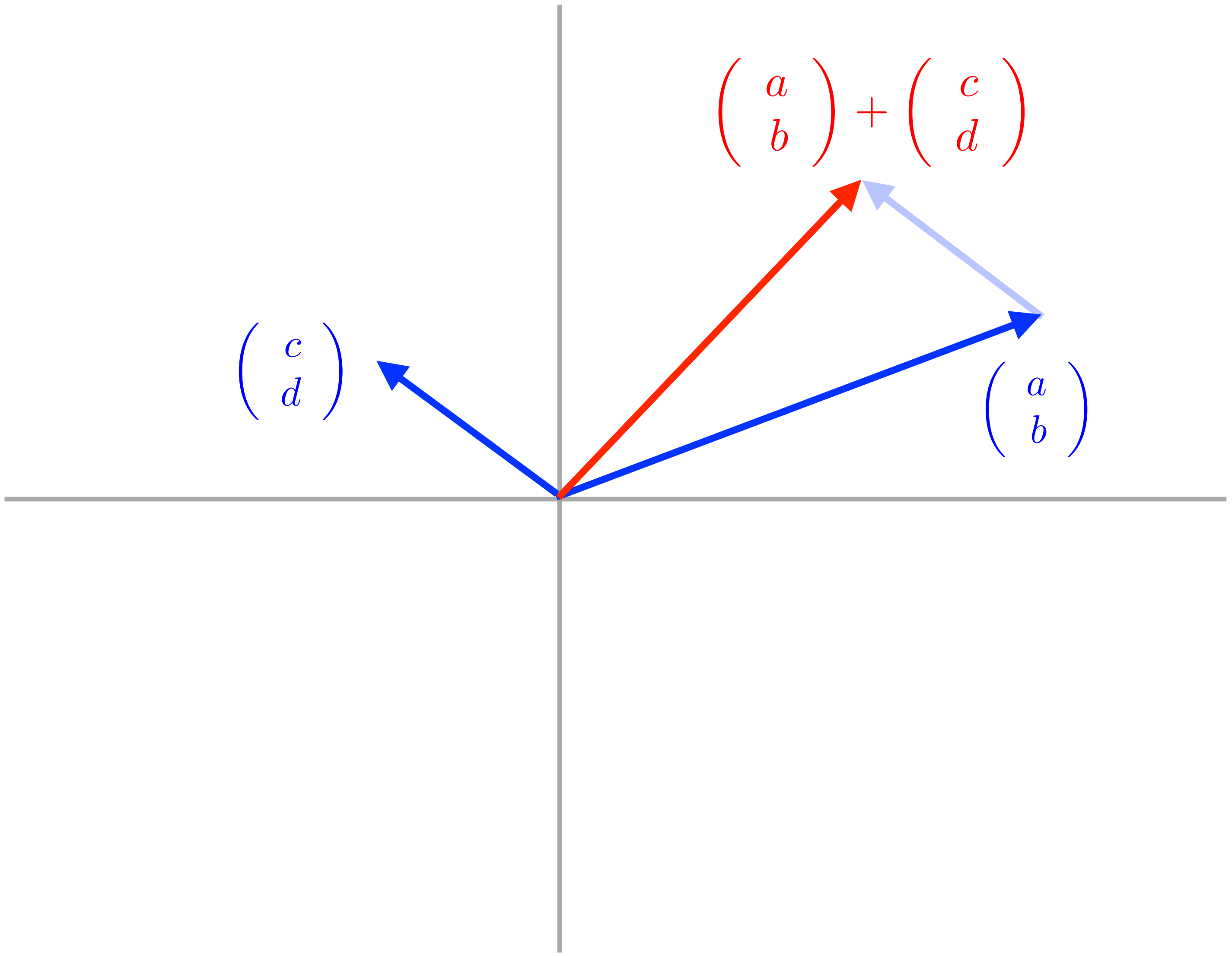
Interprétation géométrique de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$



Interprétation géométrique de l'addition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

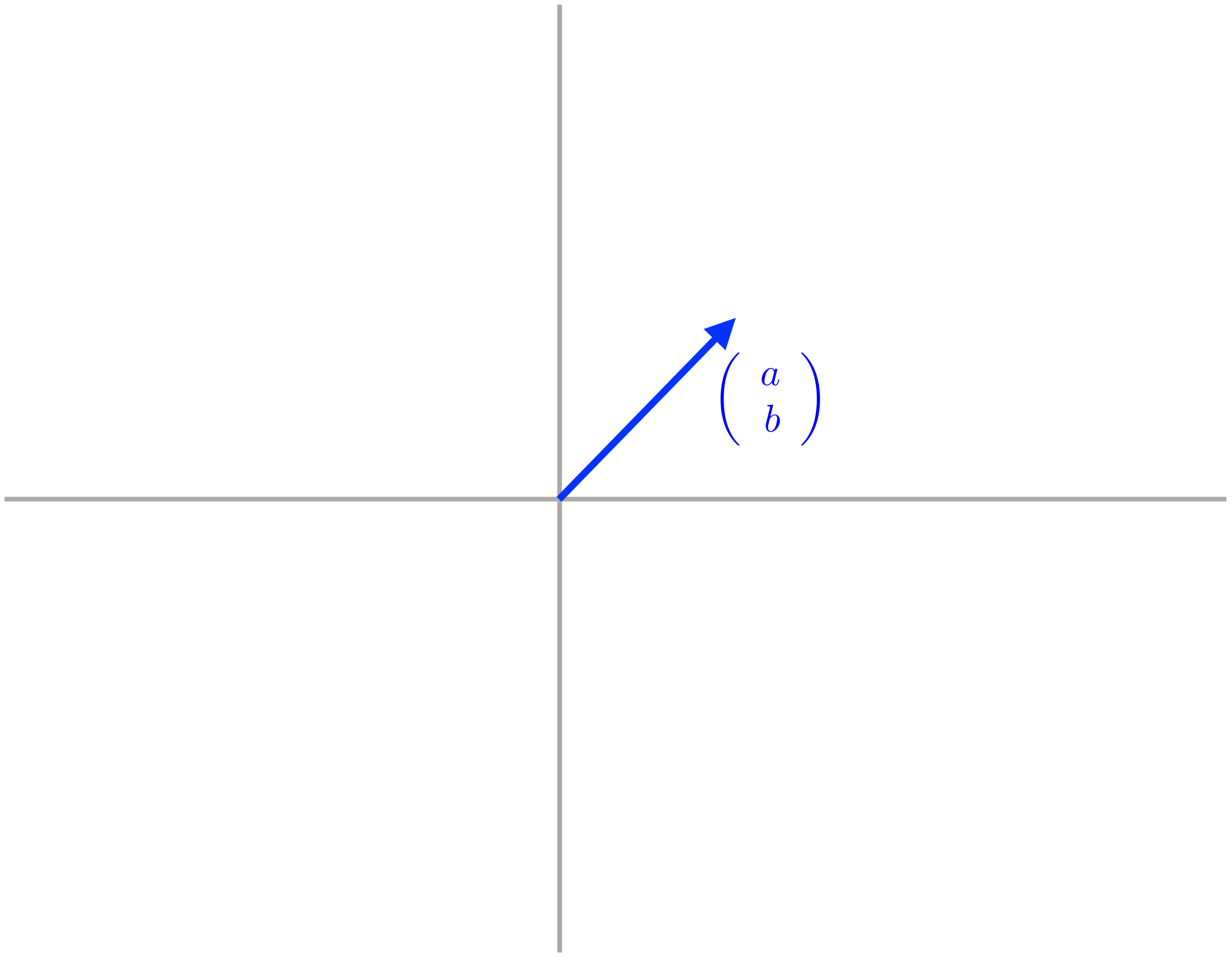


Interprétation géométrique de la multiplication scalaire

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

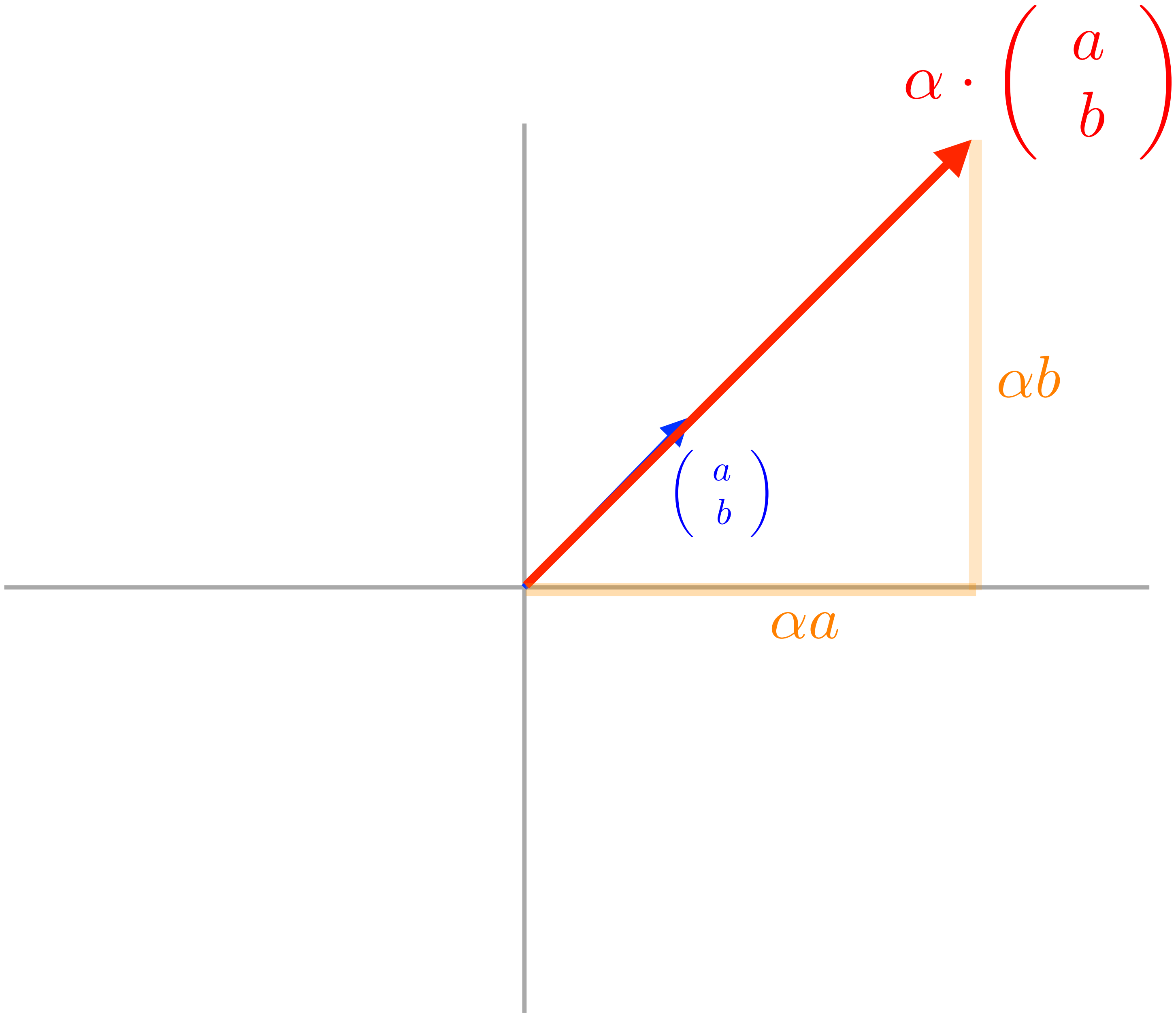
Interprétation géométrique de la multiplication scalaire

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

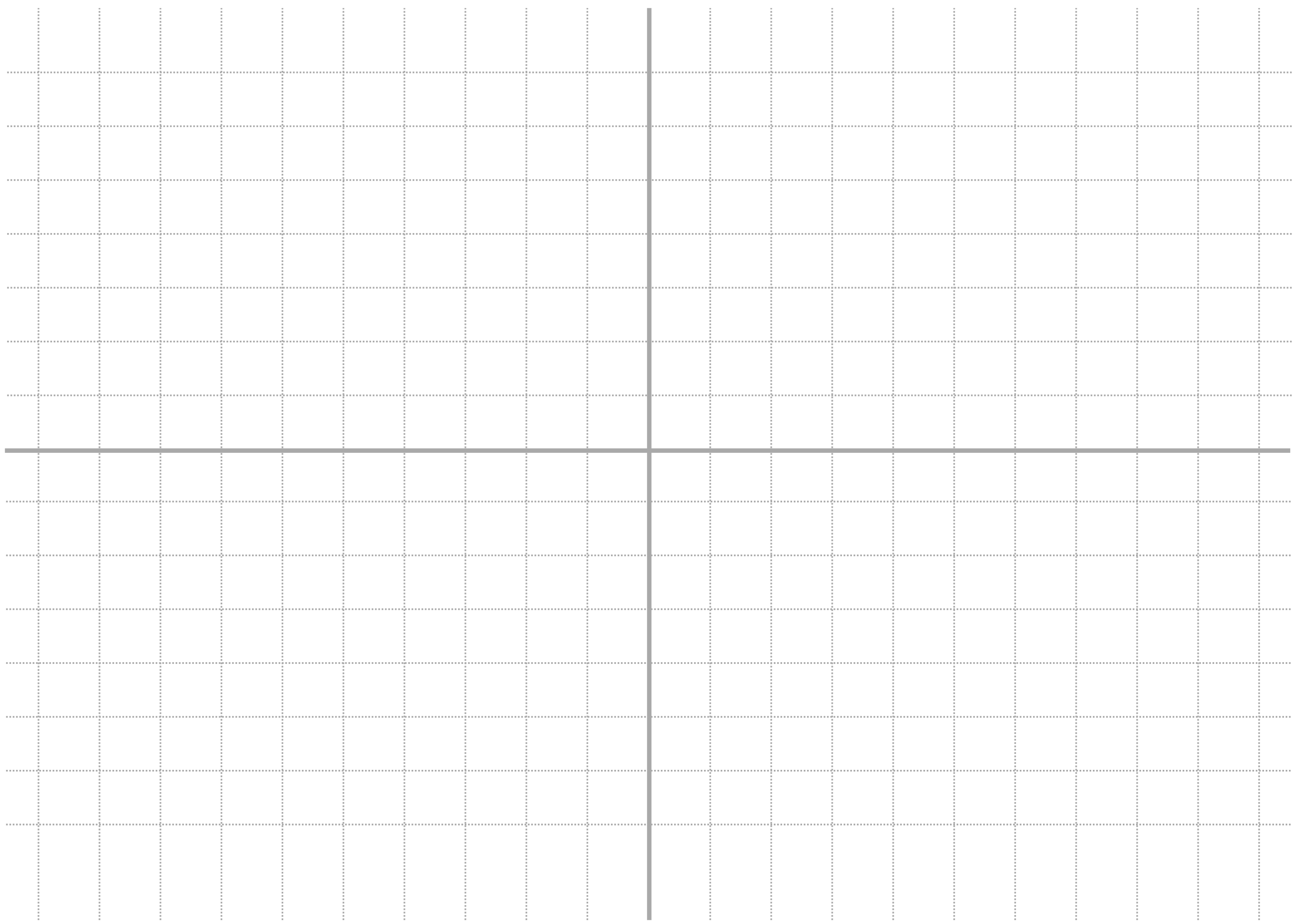


Interprétation géométrique de la multiplication scalaire

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

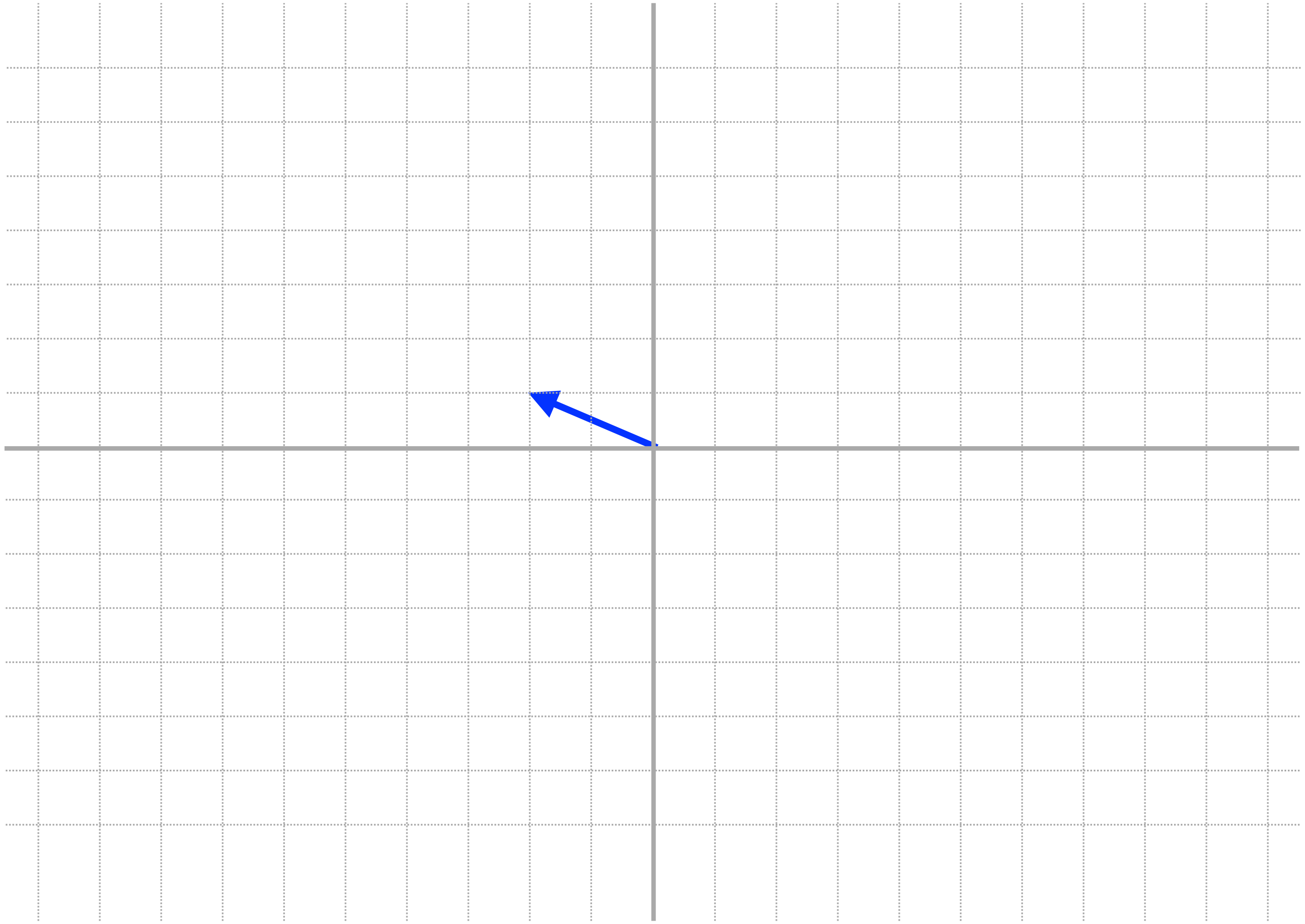


Exemple



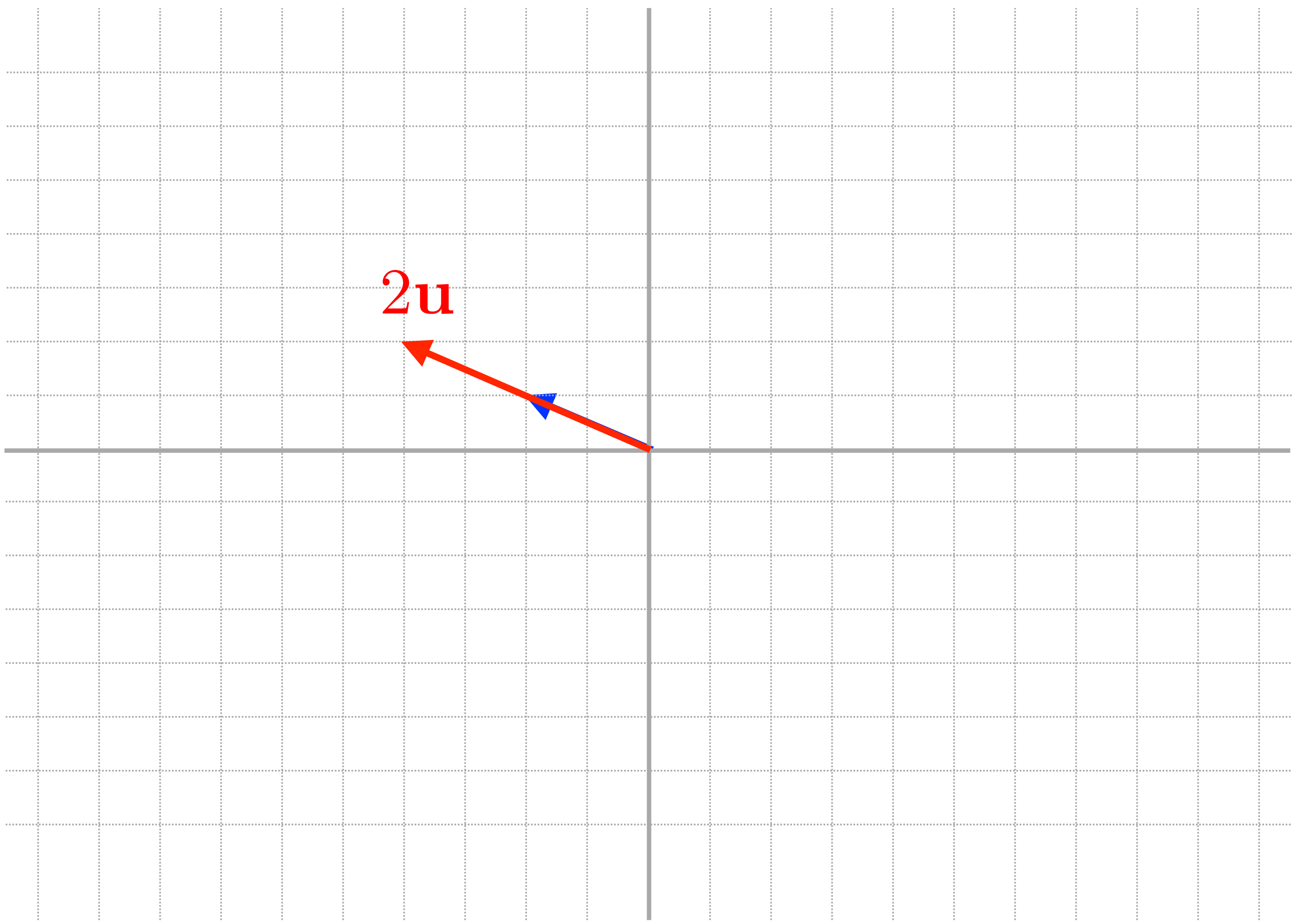
Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



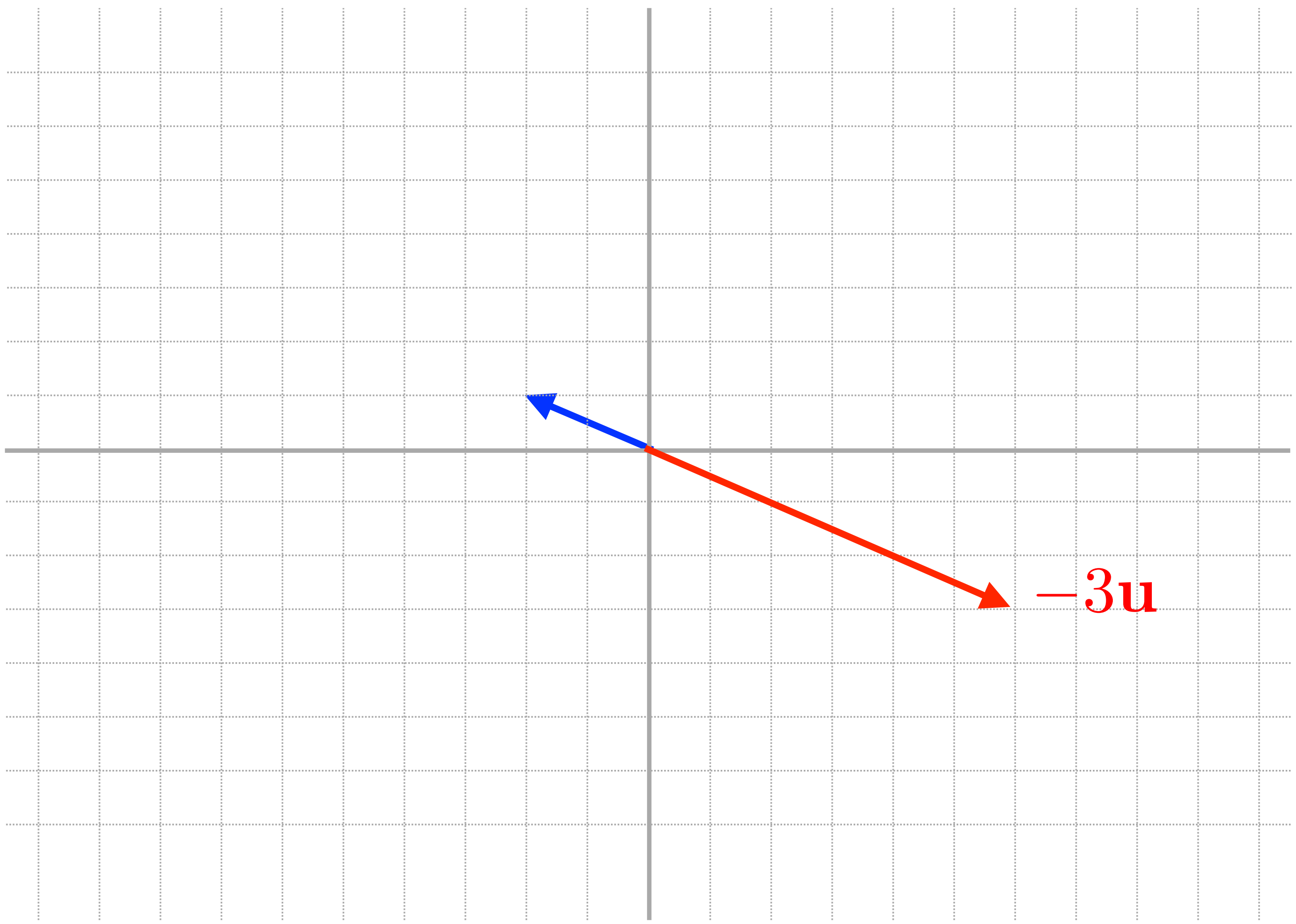
Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Exemple

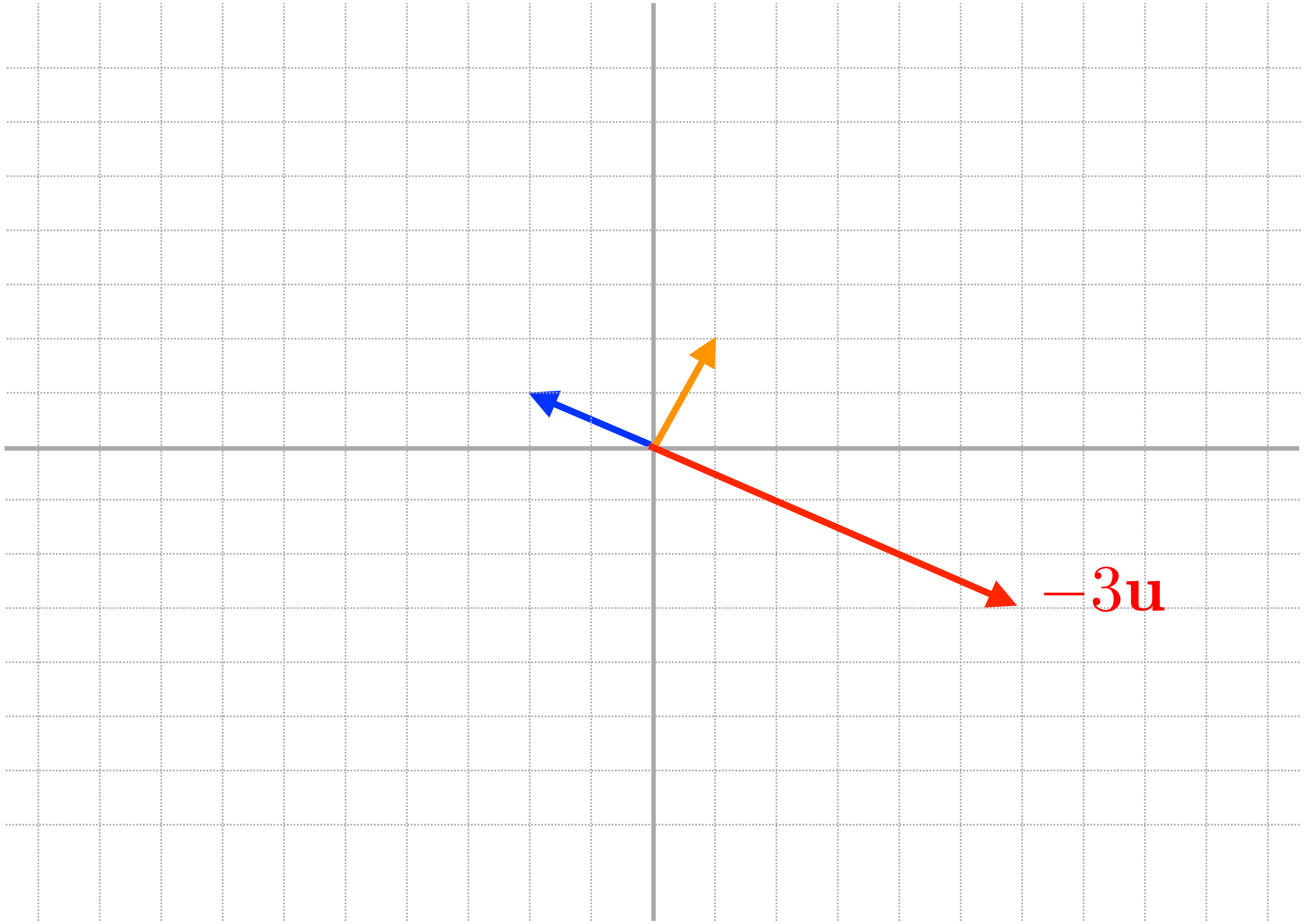
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

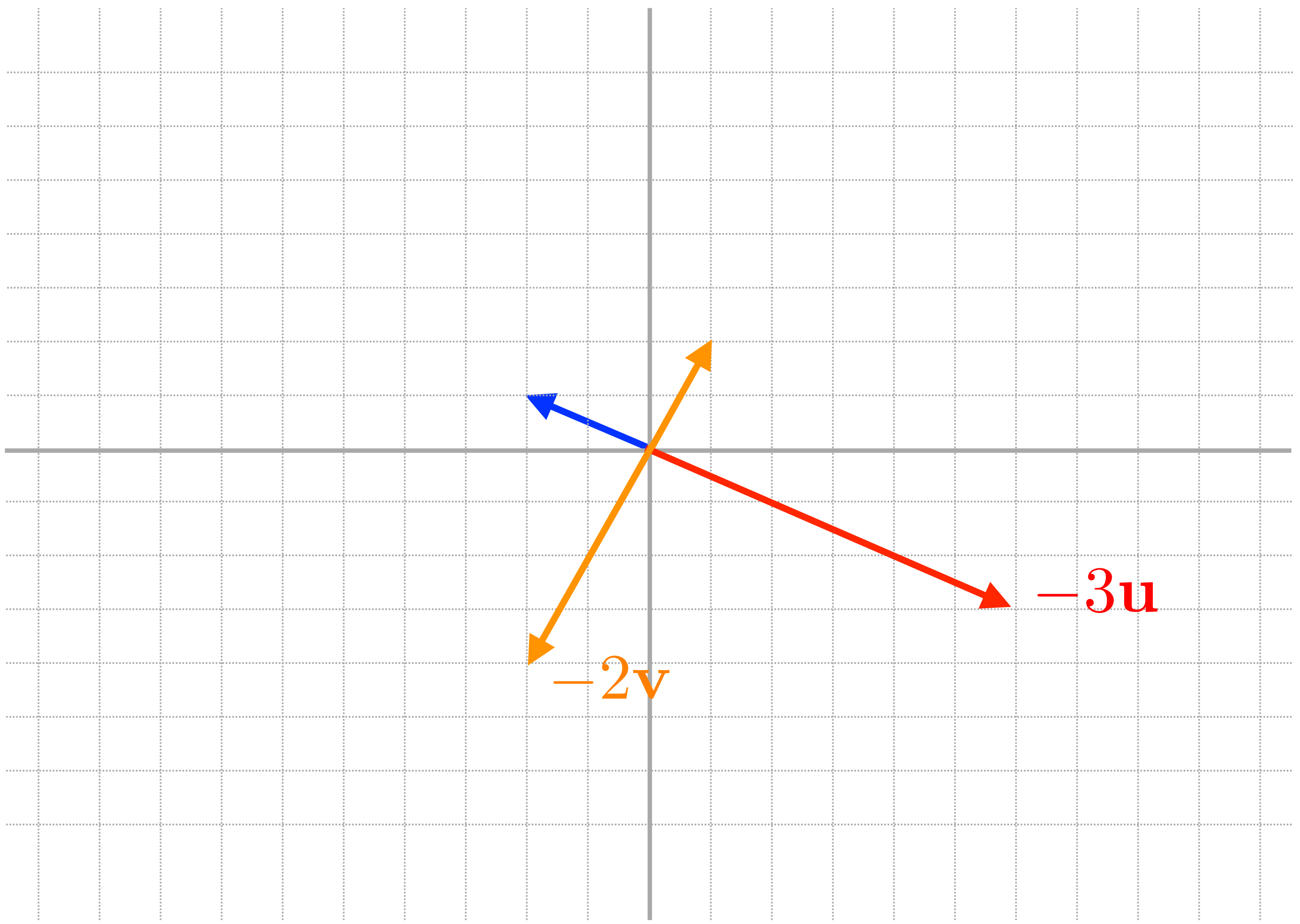
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

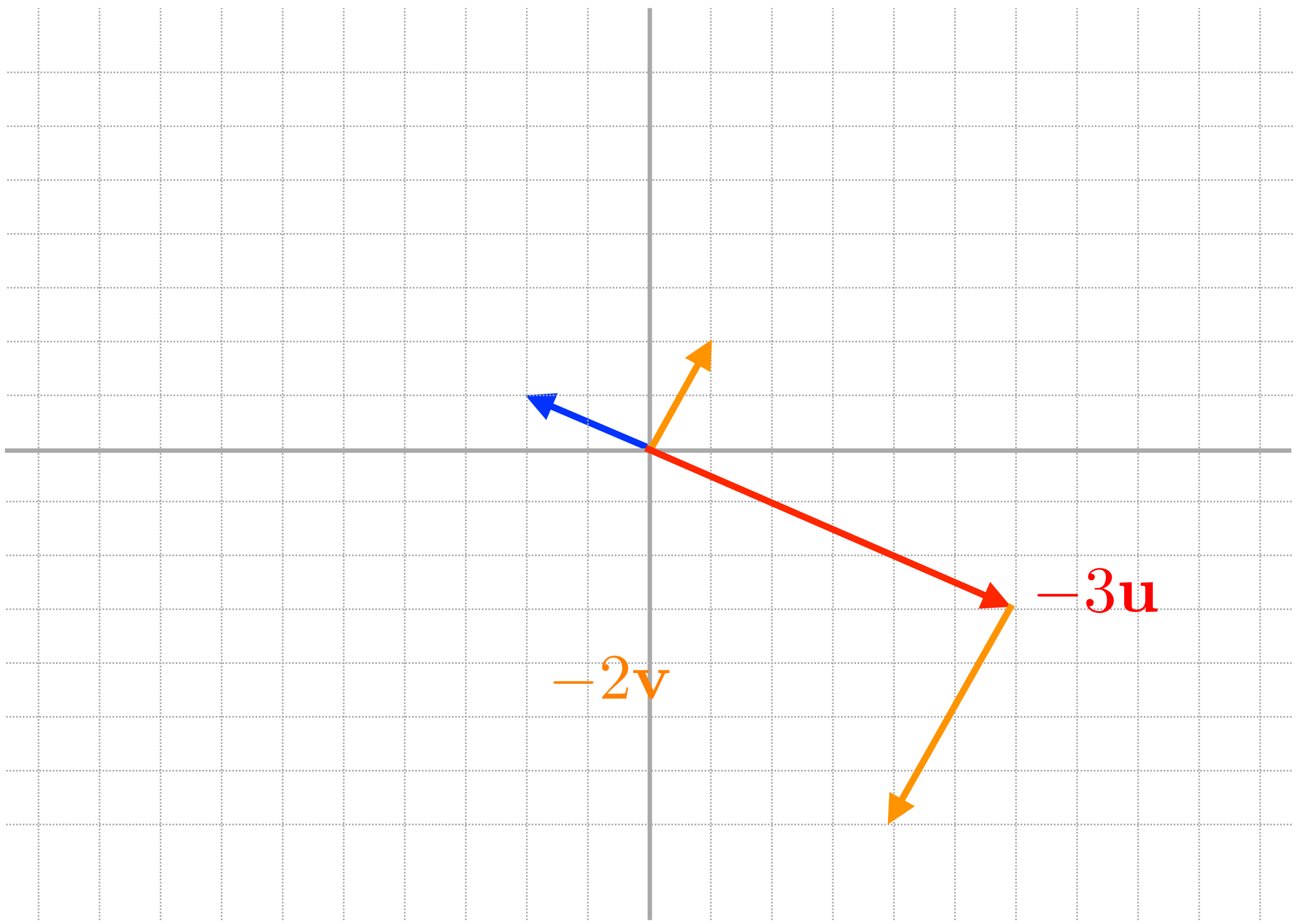
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

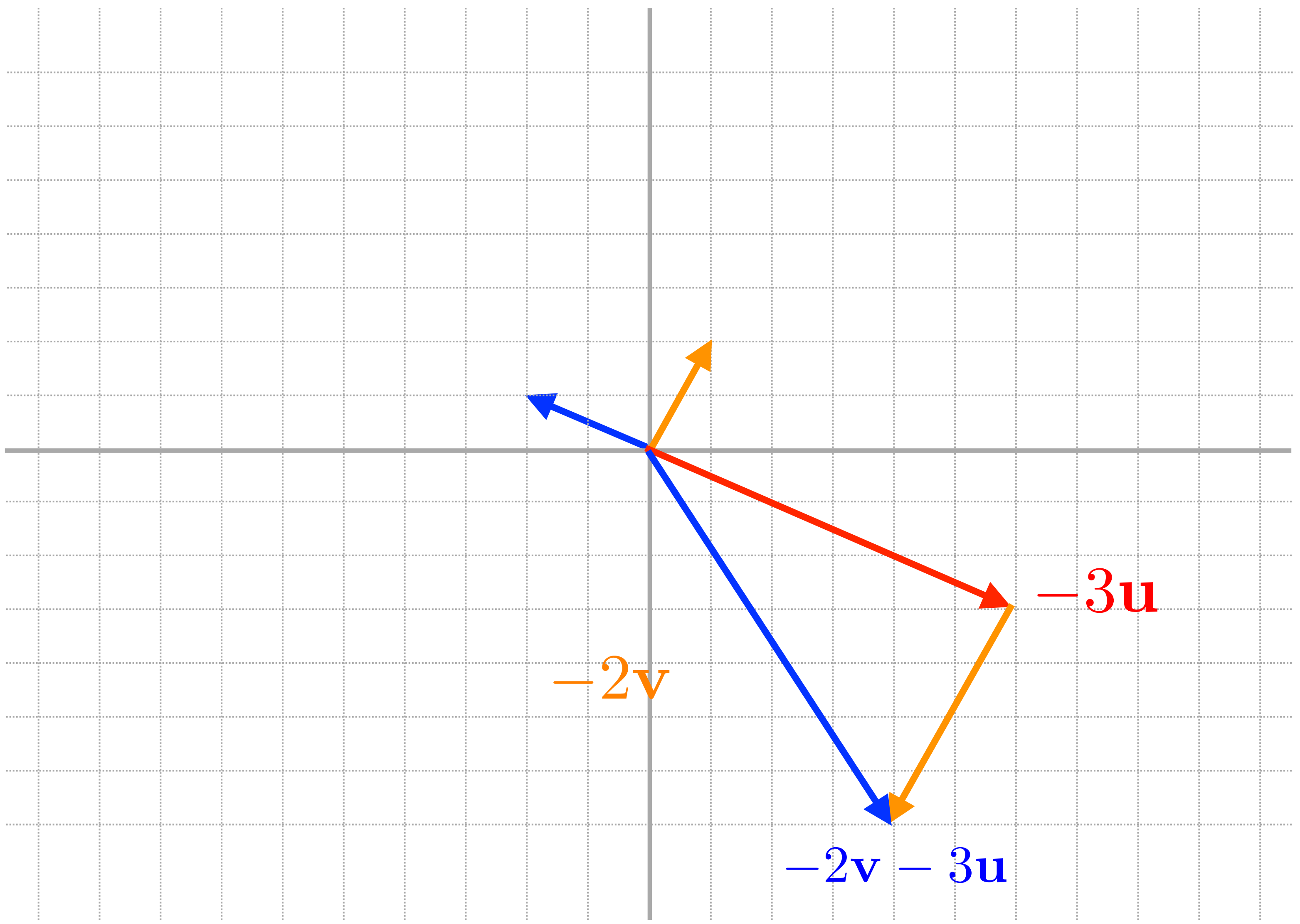
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



L’espace $\mathbb{R}^n$

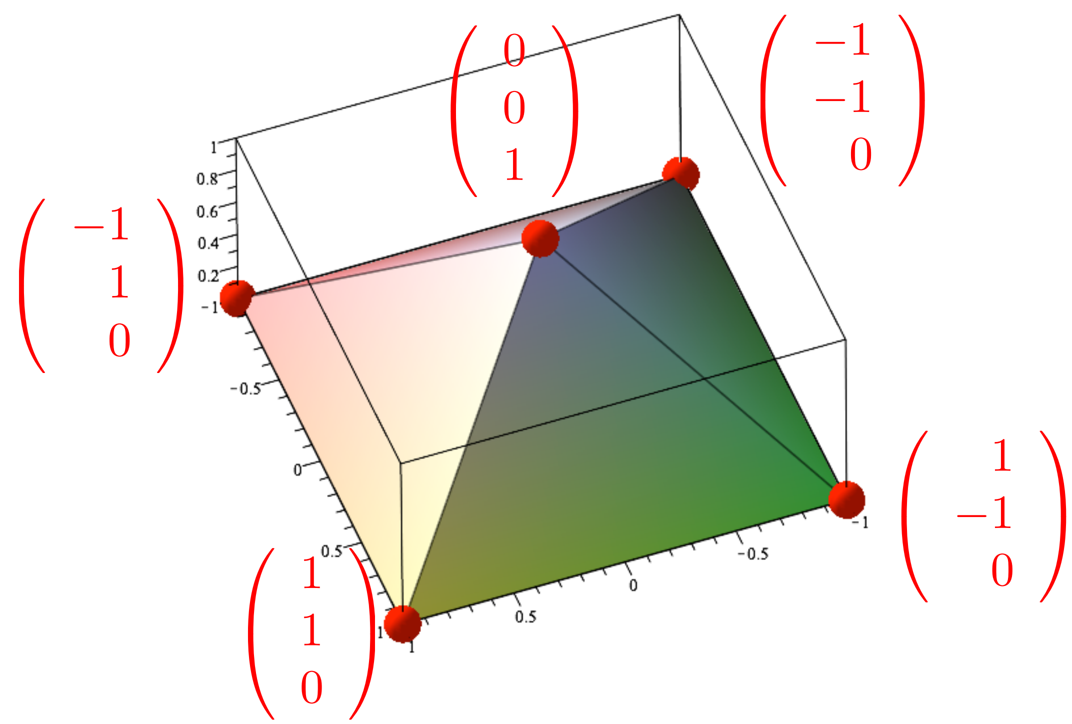
L'espace $\mathbb{R}^n$

- Les éléments sont des colonnes avec *n* composantes

L’espace $\mathbb{R}^n$

- Les éléments sont des colonnes avec *n* composantes

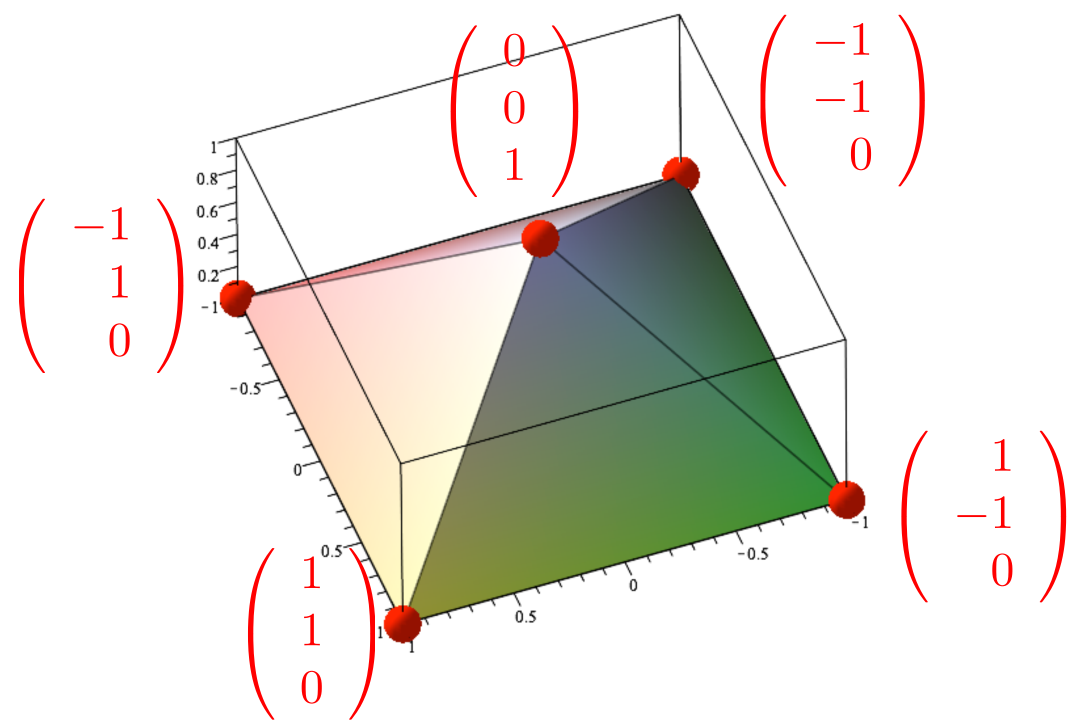
$$n = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2.3 \\ \mathrm{e}^2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad n = 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \end{pmatrix}$$



L'espace $\mathbb{R}^n$

- Les éléments sont des colonnes avec *n* composantes

$$n = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2.3 \\ e^2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad n = 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \end{pmatrix}$$

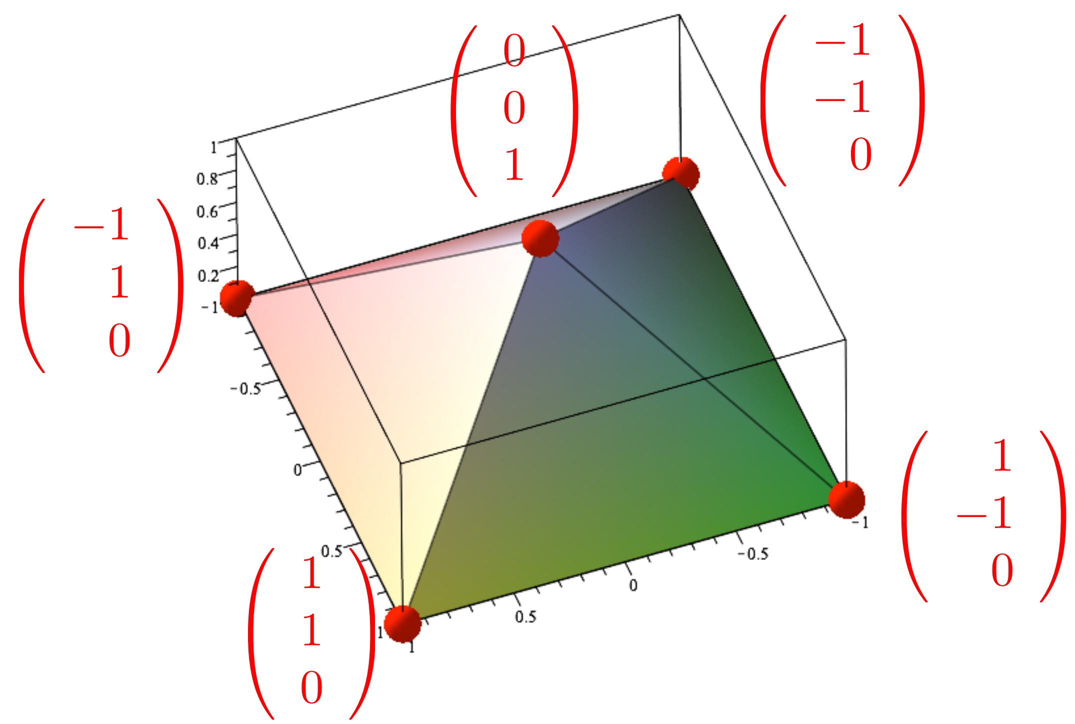


- L'addition est définie composante par composante

L'espace $\mathbb{R}^n$

- Les éléments sont des colonnes avec *n* composantes

$$n = 4 \to \begin{pmatrix} -1 \\ 2.3 \\ \mathrm{e}^2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad n = 7 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \end{pmatrix}$$



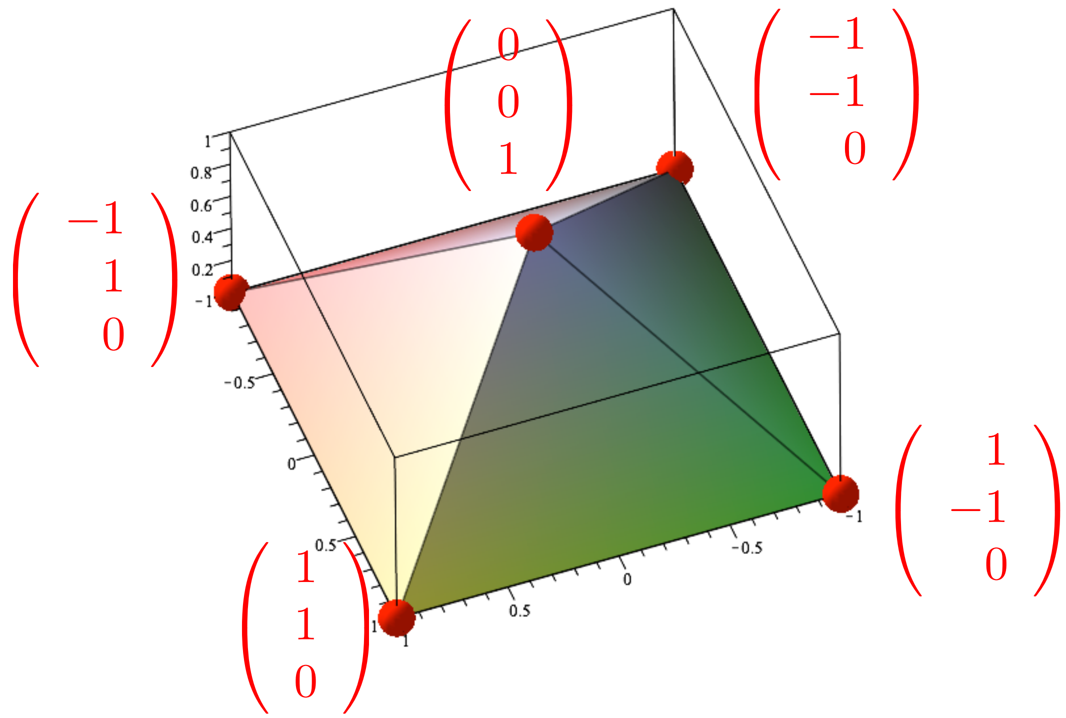
- L'addition est définie composante par composante

- La multiplication scalaire est définie composante par composante

L'espace $\mathbb{R}^n$

- Les éléments sont des colonnes avec *n* composantes

$$n = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2.3 \\ \mathrm{e}^2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad n = 7 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \\ 128 \end{pmatrix}$$



- L'addition est définie composante par composante

- La multiplication scalaire est définie composante par composante

> $\mathbb{R}^n$ avec l'addition et la multiplication scalaire défini au-dessus est un espace vectoriel.

Combinaisons linéaires

- Une *combinaison linéaire* des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur

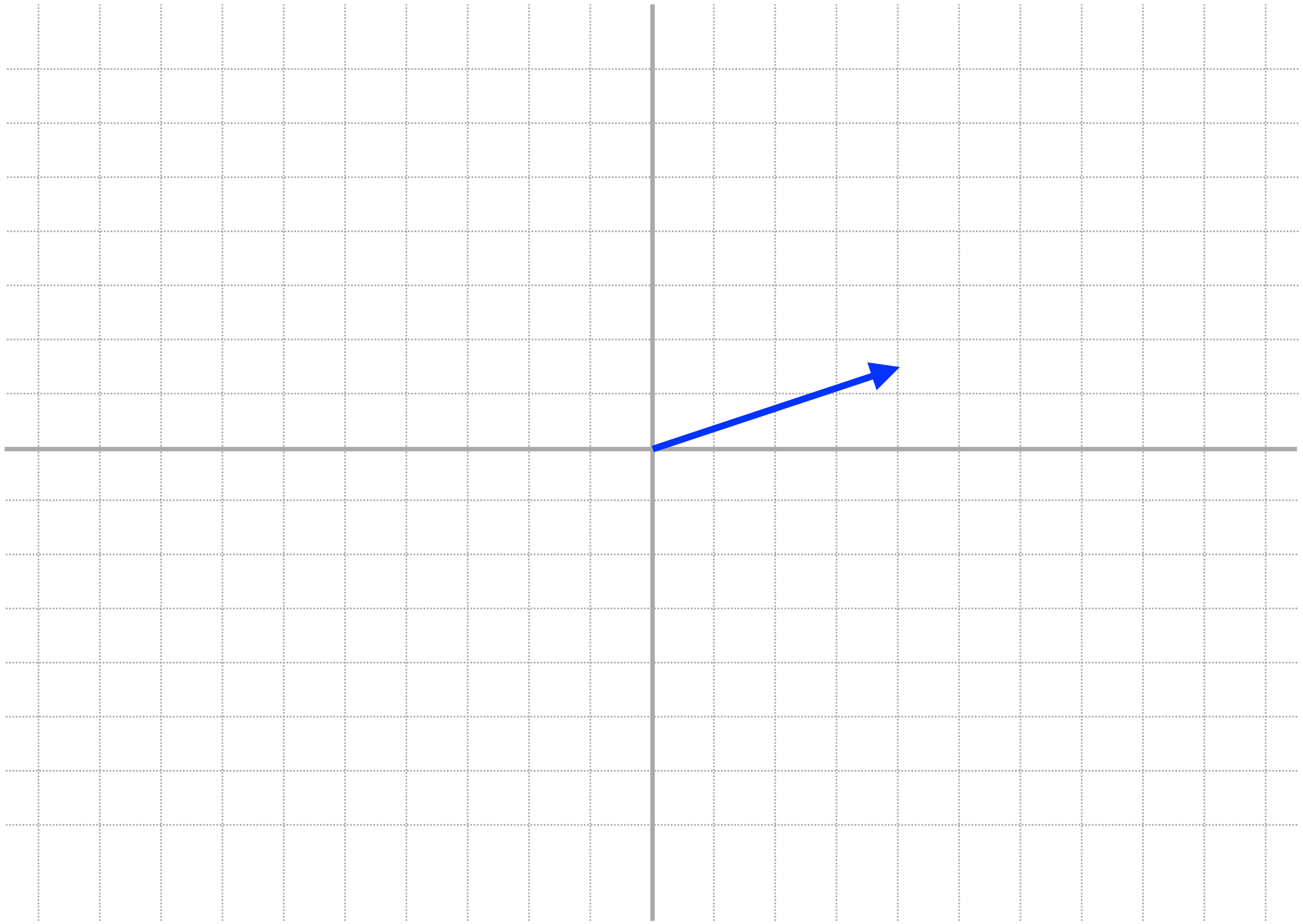
$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \ldots\ldots + c_n\boldsymbol{v_n}$$

dont $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont des nombres réels.

- L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ est appelé *la partie de $\mathbb{R}^m$ engendré par* $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ et il est noté par $\mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ ou $< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} >$

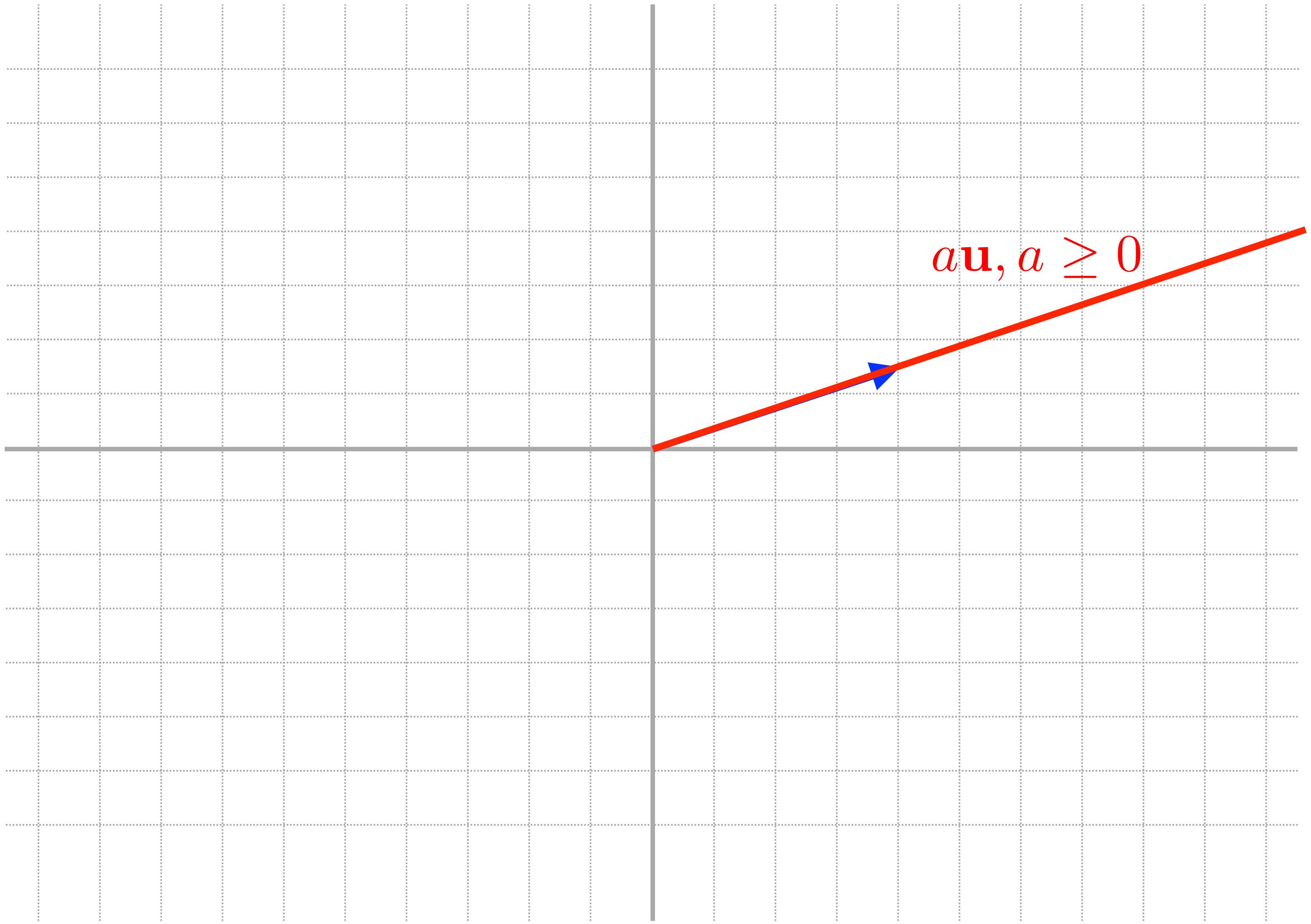
Exemple

Déterminer Vect{$\boldsymbol{u}$} pour le vecteur $\boldsymbol{u}$ ci-dessous



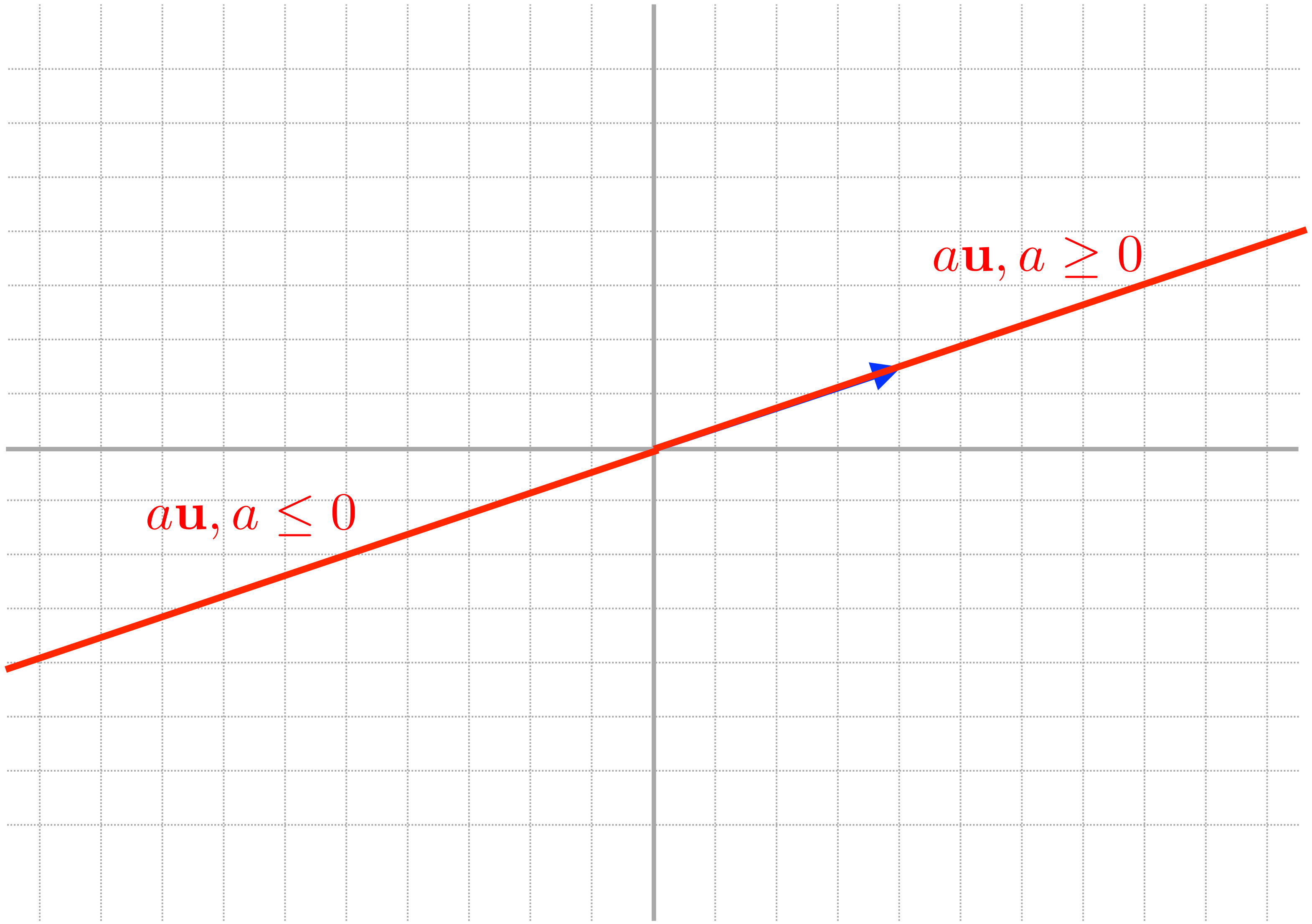
Exemple

Déterminer Vect{***u***} pour le vecteur ***u*** ci-dessous



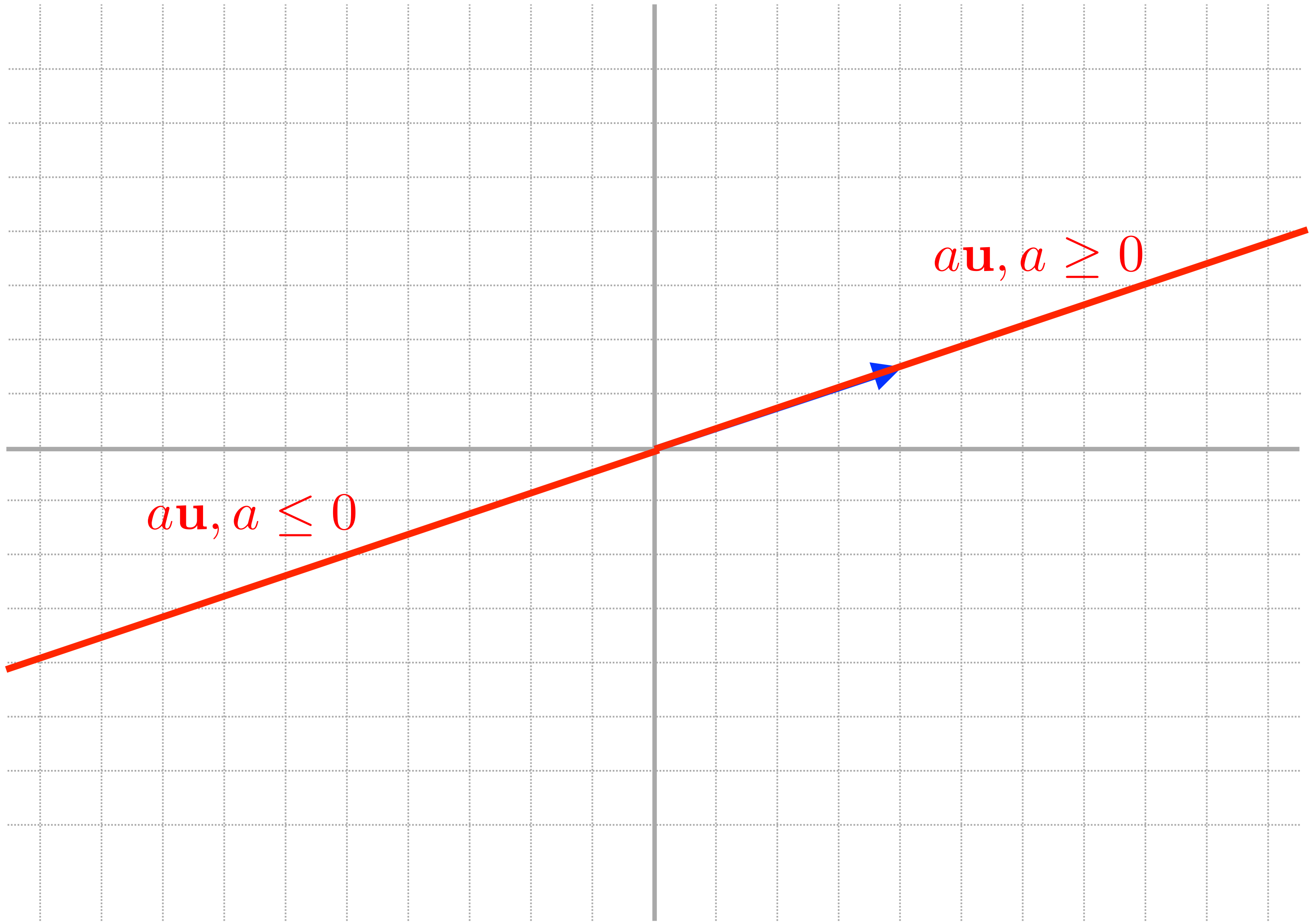
Exemple

Déterminer Vect{***u***} pour le vecteur ***u*** ci-dessous



Exemple

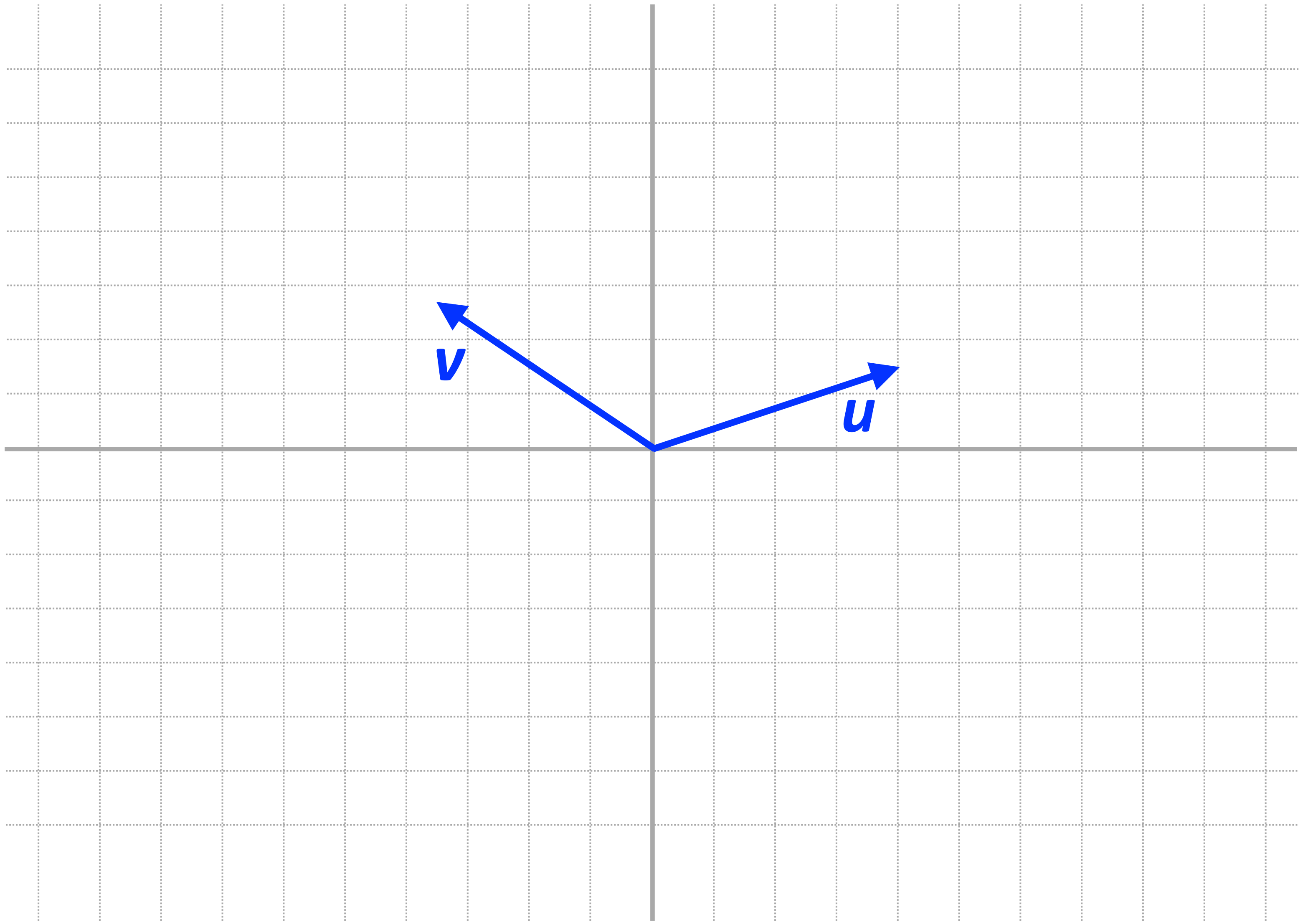
Déterminer Vect{***u***} pour le vecteur ***u*** ci-dessous



Vect{***u***} est une droite dans le plan

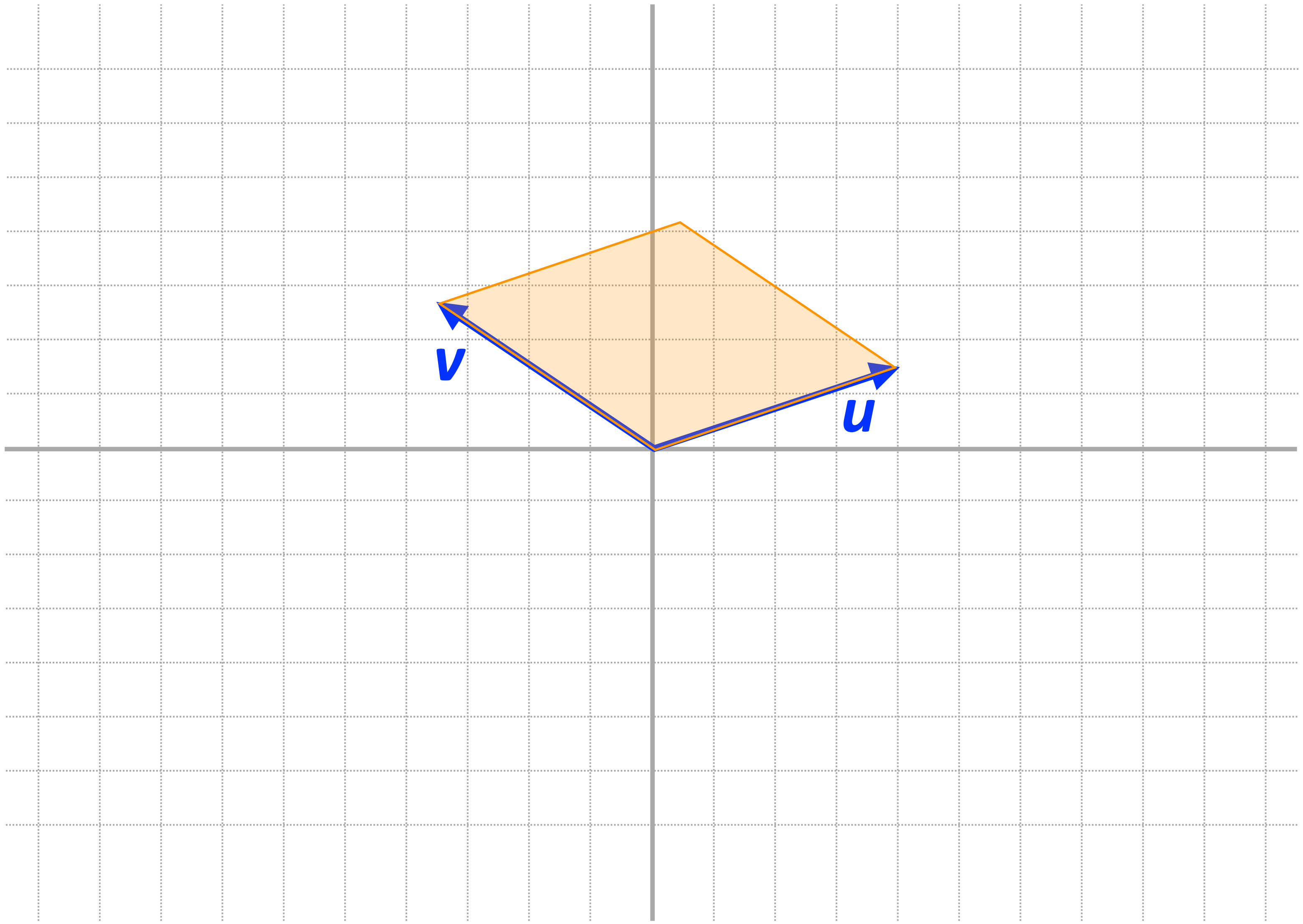
Exemple

Déterminer Vect{***u*,*v***} pour les vecteurs ***u*, *v*** ci-dessous



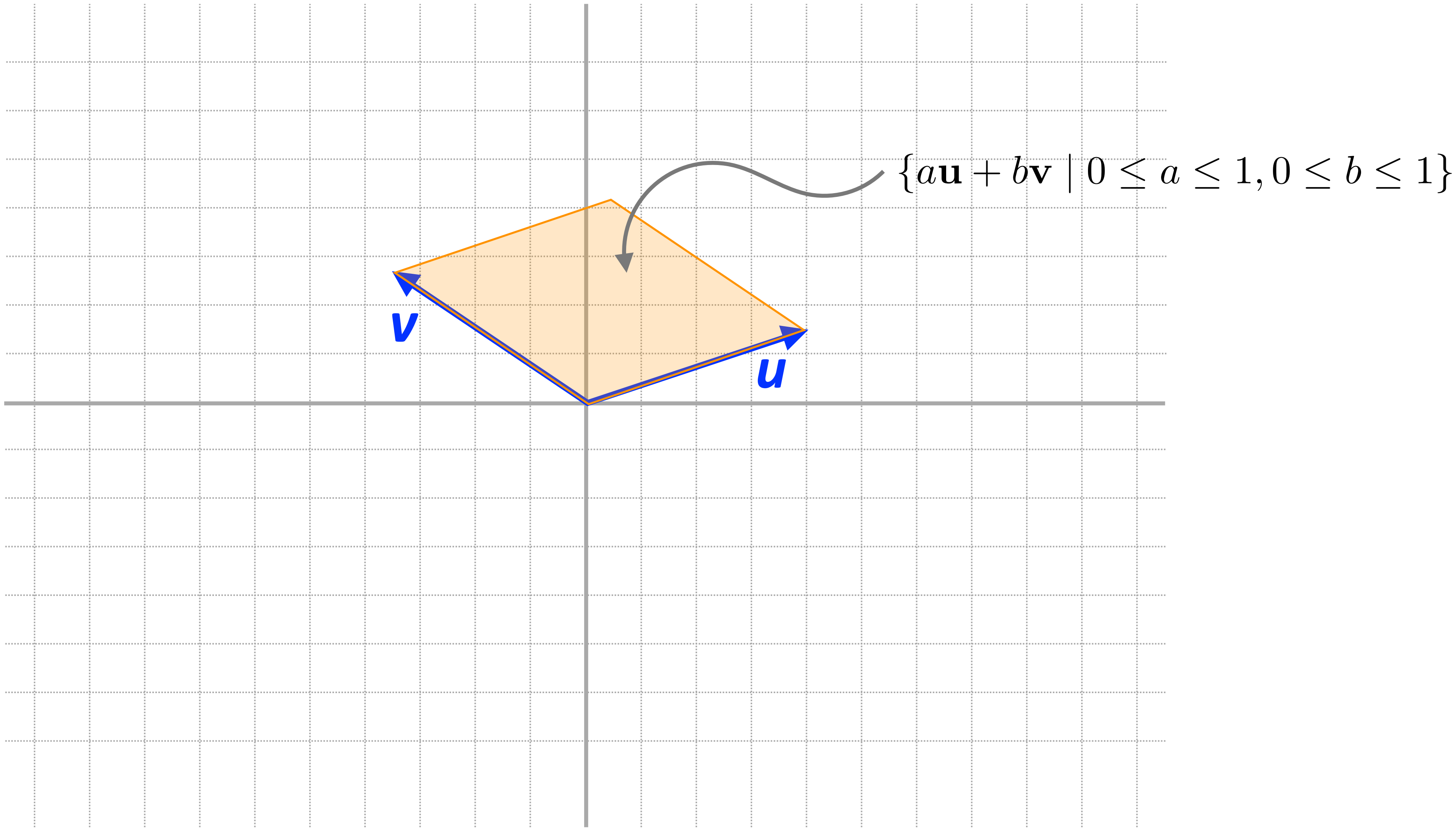
Exemple

Déterminer Vect{***u***,***v***} pour les vecteurs ***u***, ***v*** ci-dessous



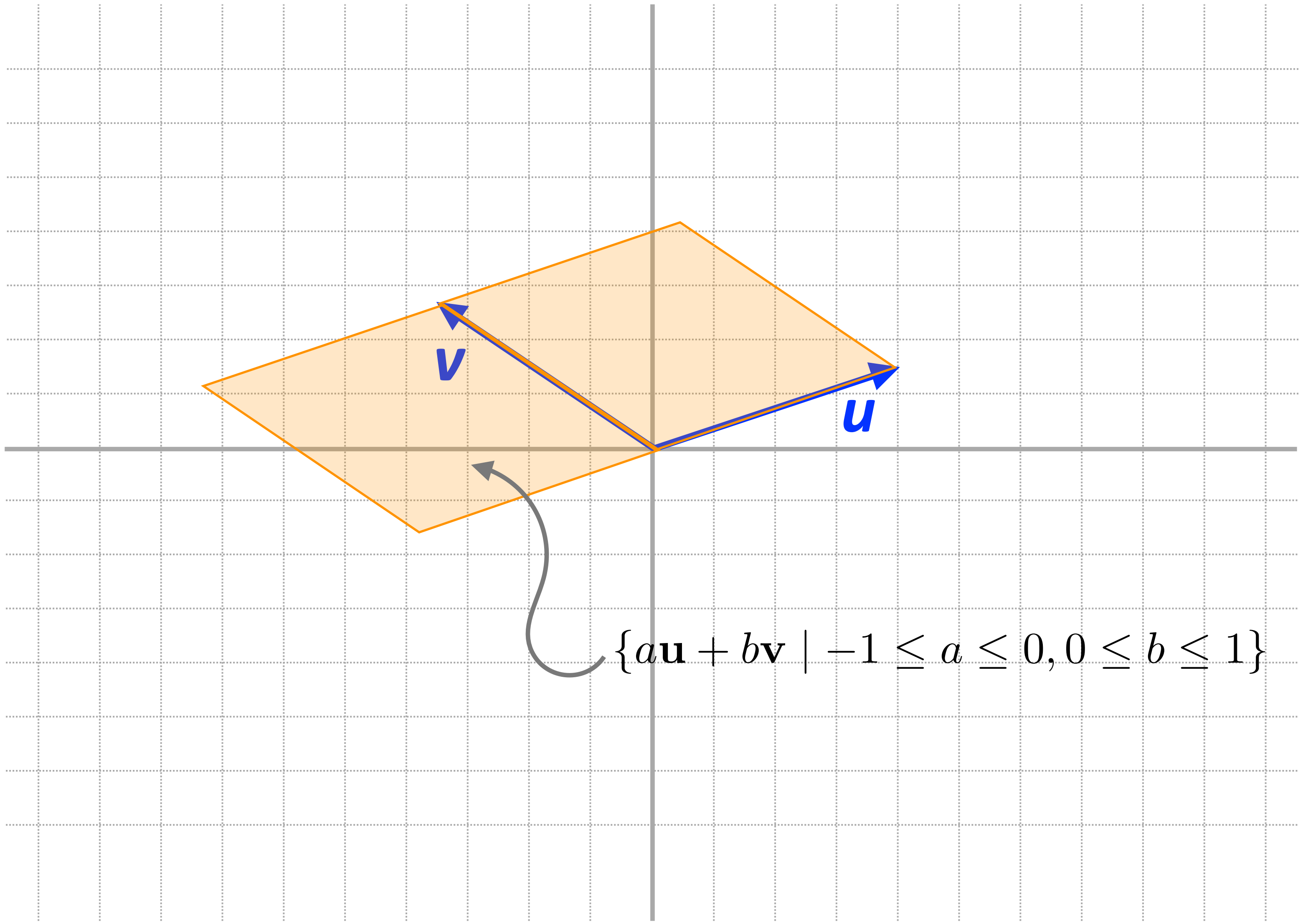
Exemple

Déterminer Vect{***u***,***v***} pour les vecteurs ***u, v*** ci-dessous



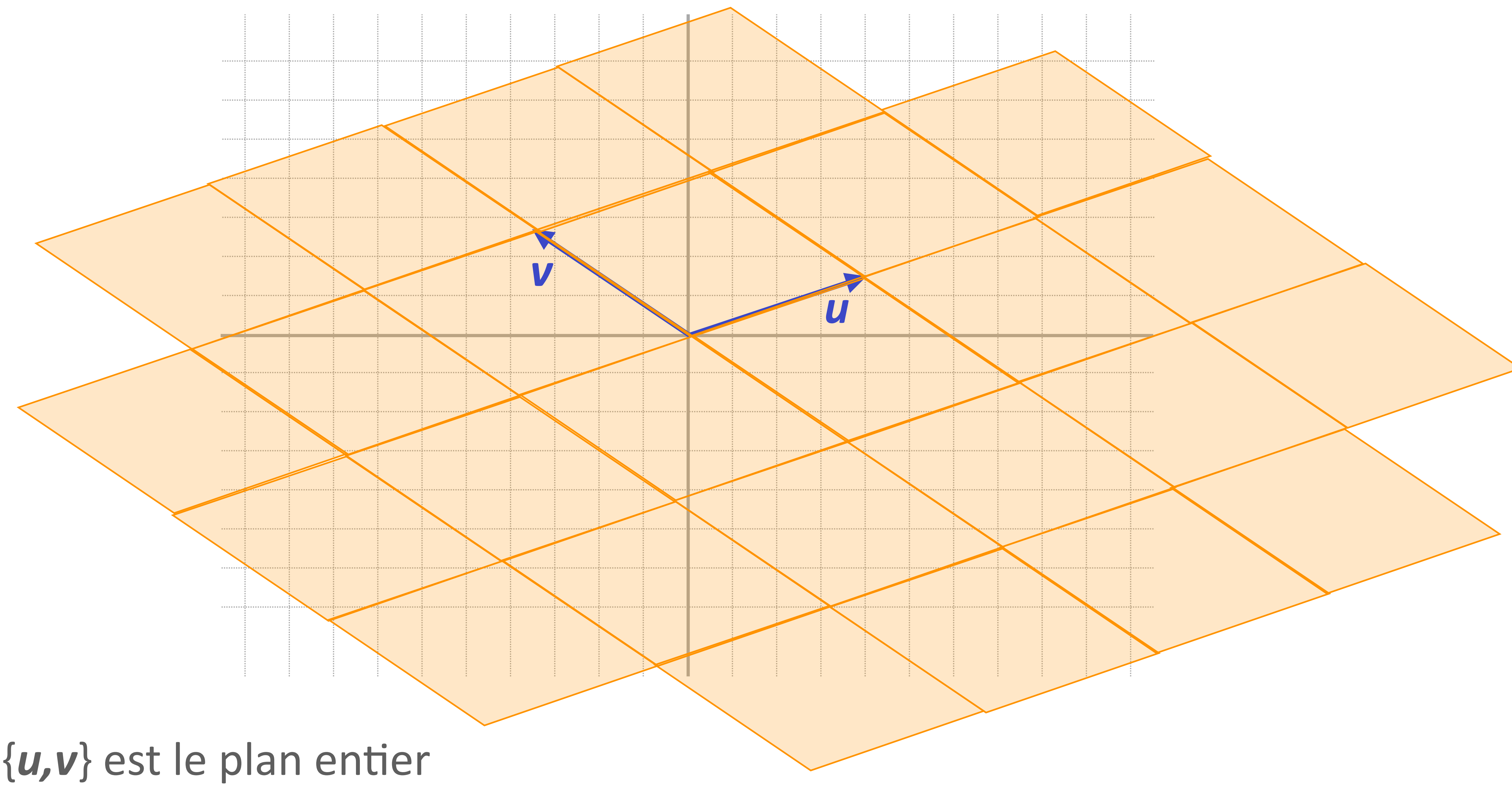
Exemple

Déterminer Vect{***u,v***} pour les vecteurs ***u, v*** ci-dessous



Exemple

Déterminer Vect{***u***,***v***} pour les vecteurs ***u***, ***v*** ci-dessous



Vect{***u***,***v***} est le plan entier

Exemple

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Est-ce que $\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$?

$$\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \iff \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ telle que } x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

$$\iff x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\times 5 \; + \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \quad \times 2 \; +$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right)$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \times \frac{1}{9}$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right)$$

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-16) \\ + \end{array}$$

Exemple (cont.)

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\Longleftrightarrow$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple (cont.)

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Forme échelonnée réduite

Exemple (cont.)

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Forme échelonnée réduite

- Deux variables principales
- Pas de variable non-principale
- Il y a exactement une solution

Exemple (cont.)

$$\iff \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & 7 \\ -2x_1 + 5x_2 & = & 4 \\ -5x_1 + 6x_2 & = & -3 \end{array}$$

$\iff$ Le système d'équations linéaires au-dessus a une solution

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \times(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Forme échelonnée réduite

$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$

- Deux variables principales
- Pas de variable non-principale
- Il y a exactement une solution

Exemple (cont.)

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemple (cont.)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exemple (cont.)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour décider si $\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, on pose $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{b}$ dans une matrice

Exemple (cont.)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Pour décider si $\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, on pose ***a***$_1$**,** ***a***$_2$ et ***b*** dans une matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

Exemple (cont.)

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \color{red}{\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}$$

Pour décider si $\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, on pose ***a***$_1$**,** ***a***$_2$ et ***b*** dans une matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & \color{red}{7} \\ -2 & 5 & \color{red}{4} \\ -5 & 6 & \color{red}{-3} \end{array}\right)$$

et considère la matrice comme la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires.

$\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ si, et seulement si, ce système a une solution.

Cas général

Pour $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^m$ déterminer si $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_n\}$

On pose $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{b}$ comme colonnes d'une matrice et la considère comme la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires.

$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ si, et seulement si, ce système a une solution

$$\left(\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v_2} \quad \cdots \mathbf{v}_n \mid \mathbf{b}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de h telles que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que ***y*** ∊ Vect{$\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$}

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que ***y*** ∊ Vect{***v*₁**, ***v*₂**}

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2h+4 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que ***y*** ϵ Vect{$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$}

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2h+4} \end{array}\right)$$

Forcément = 0

h = -2

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que ***y*** ∊ Vect{$\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$}

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2h+4} \end{array}\right)$$

Forcément = 0

h = -2

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de *h* telles que ***y*** ϵ Vect{$\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$}

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2h+4} \end{array}\right)$$

Forcément = 0

h = -2

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les valeurs de h telles que $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Vect}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 2h-5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & h \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2h+4} \end{array}\right)$$

Forcément = 0

h = -2

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \mathbf{y} = -8\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$$

Produit d'une matrice avec un vecteur de $\mathbb{R}^m$

A est une matrice *m* x *n* (ca veut dire, avec *m* lignes et *n* colonnes), de colonnes $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$

Le <u>*produit de A par **x***</u>, noté par *A**x*** est défini comme la combinaison linéaire de colonnes de *A* dont les coefficients sont les composantes correspondantes de ***x***:

$$\boxed{A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} =$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{x}$ est défini si, et seulement si, le nombre de colonnes de A et le nombre de composantes de $\boldsymbol{x}$ sont égaux

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*A**x*** est défini si, et seulement si, le nombre de colonnes de *A* et le nombre de composantes de ***x*** sont égaux

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*A**x*** est défini si, et seulement si, le nombre de colonnes de *A* et le nombre de composantes de ***x*** sont égaux

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ax est défini si, et seulement si, le nombre de colonnes de *A* et le nombre de composantes de ***x*** sont égaux

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ax est défini si, et seulement si, le nombre de colonnes de *A* et le nombre de composantes de ***x*** sont égaux

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Système d'équations linéaires

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Système d’équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} m & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} & m \end{array}$$

Système d'équations linéaires

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad &\;\;\vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{n}{\longleftrightarrow} & & \\
m\updownarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & n\updownarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} & \updownarrow m
\end{array}
$$

Système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} n & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} & m \end{array}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Equation matricielle

Système d'équations linéaires

L'équation $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ admet une solution si, et seulement si, $\boldsymbol{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A.

Système d'équations linéaires

L'équation *A**x**=**b*** admet une solution si, et seulement si, ***b*** est combinaison linéaire des colonnes de *A*.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Système d'équations linéaires

L'équation *A**x**=**b*** admet une solution si, et seulement si, ***b*** est combinaison linéaire des colonnes de *A*.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

Système d'équations linéaires

L'équation ***Ax=b*** admet une solution si, et seulement si, ***b*** est combinaison linéaire des colonnes de *A*.

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Propriétés du produit d'une matrice par un vecteur

Soit A une matrice m x n, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et c un scalaire (élément de $\mathbb{R}$.

- $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$
- $A(c\boldsymbol{u}) = c(A\boldsymbol{u})$

Démonstration: dans la classe

Théorème

Soit *A* une matrice *m* x *n*. Les propriétés suivantes sone équivalentes:

(1) *Pour tout* **b** dans $\mathbb{R}^m$, l'équation *A**x*** = ***b*** admets au moins une solution
(2) Tout vecteurs de $\mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire de colonnes de *A*
(3) Les colonnes de *A* engendrent $\mathbb{R}^m$
(4) Il existe dans chaque ligne de *A* une position de pivot

Démonstration: dans la classe

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \boxed{b} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{5} \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \boxed{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \boxed{-2} & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & \boxed{1} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \boxed{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ \boxed{3} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & \boxed{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \boxed{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ 3 \times a + 1 \times b + 2 \times c \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ 3 \times a + 1 \times b + 2 \times c \\ \\ \end{pmatrix}$$

Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \boxed{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ 3 \times a + 1 \times b + 2 \times c \\ 1 \times a + (-1) \times b + 0 \times c \end{pmatrix}$$

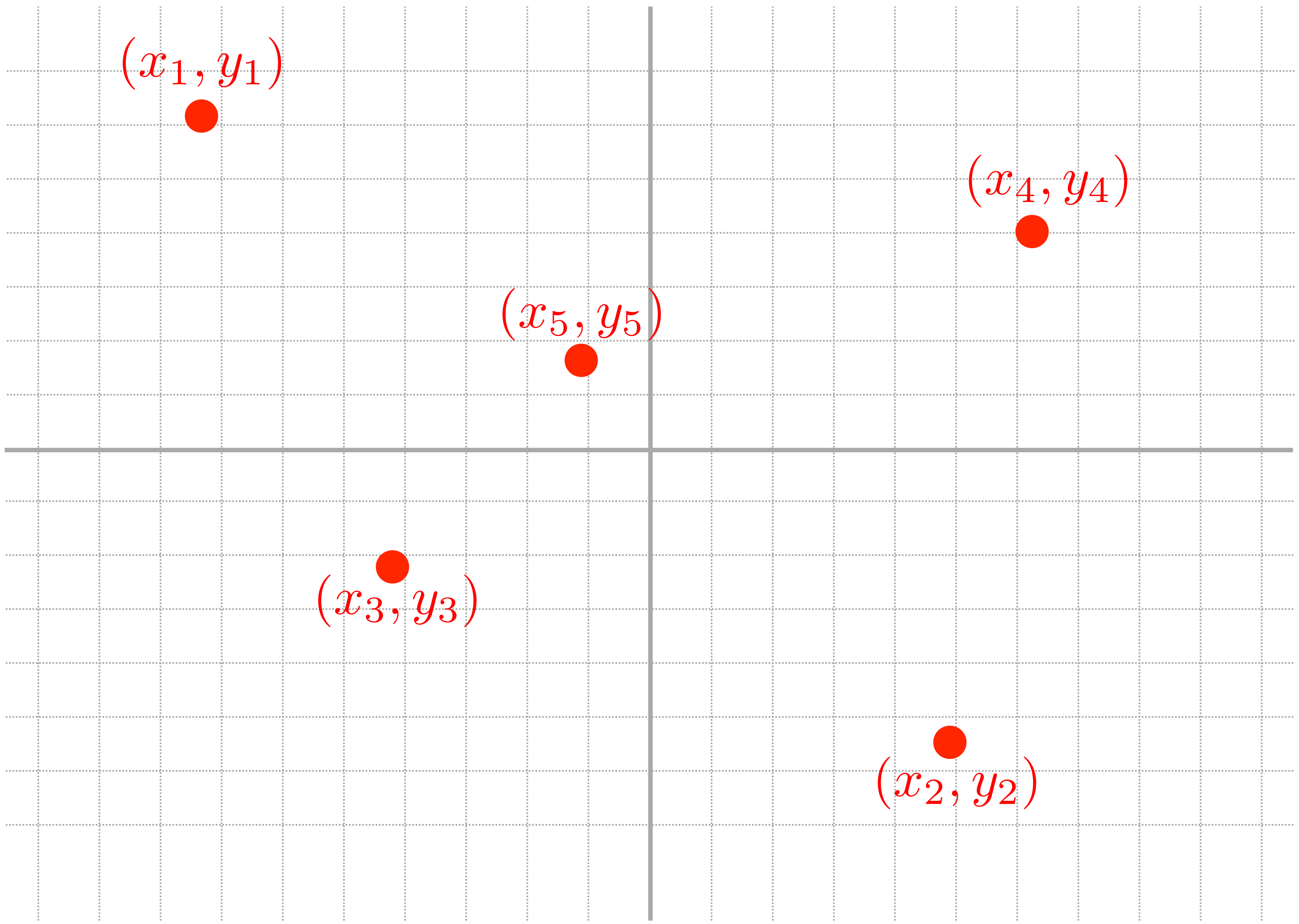
Calcule de Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c \\ (-1) \times a + 4 \times b + 1 \times c \\ 3 \times a + 1 \times b + 2 \times c \\ 1 \times a + (-1) \times b + 0 \times c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + 3b + 5c \\ -a + 4b + c \\ 3a + b + 2c \\ a - b \end{pmatrix}$$

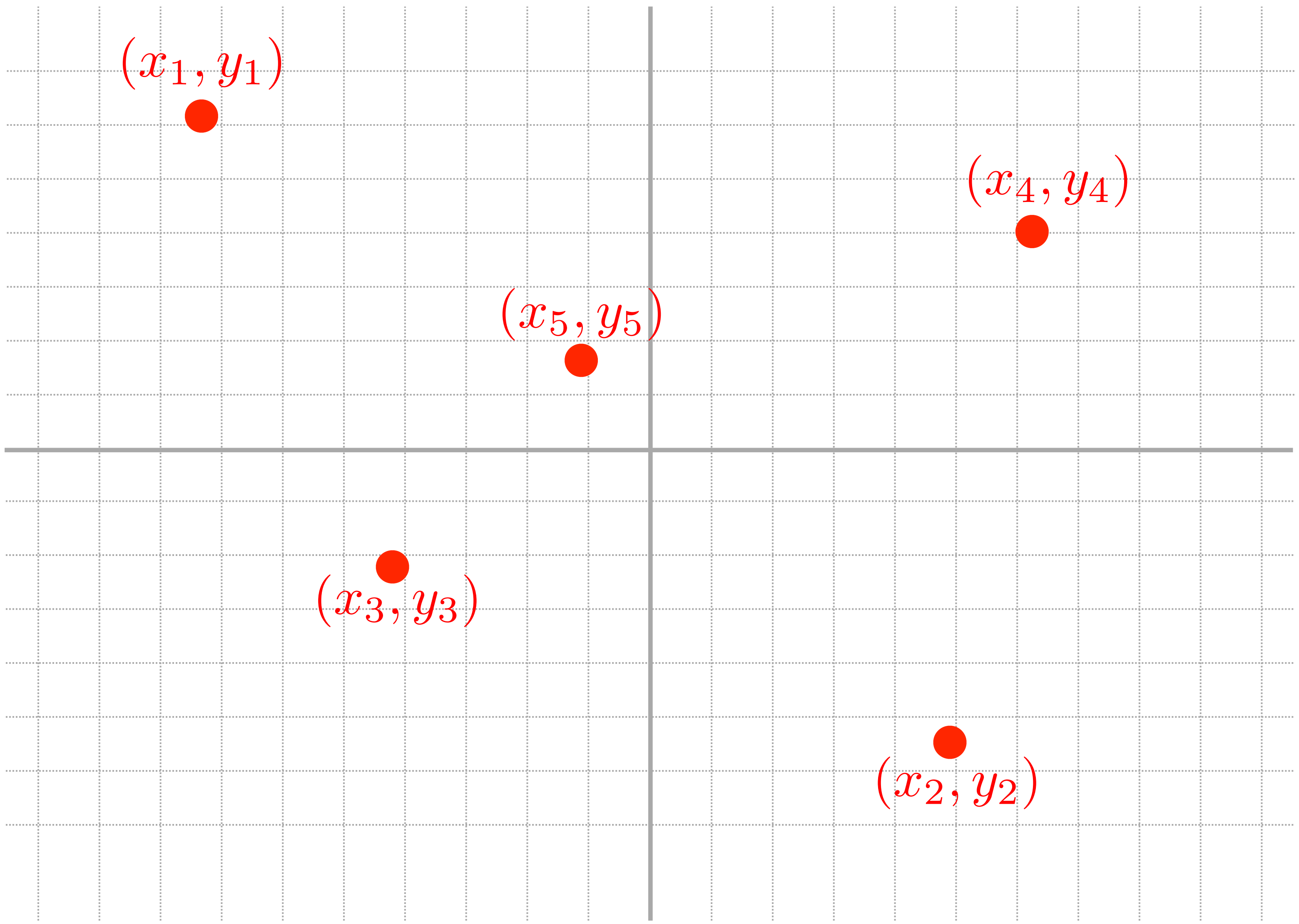
Application: l'interpolation

Trouver un polynôme de degré ≤ 4 qui passe par les points ci-dessous



Application: l'interpolation

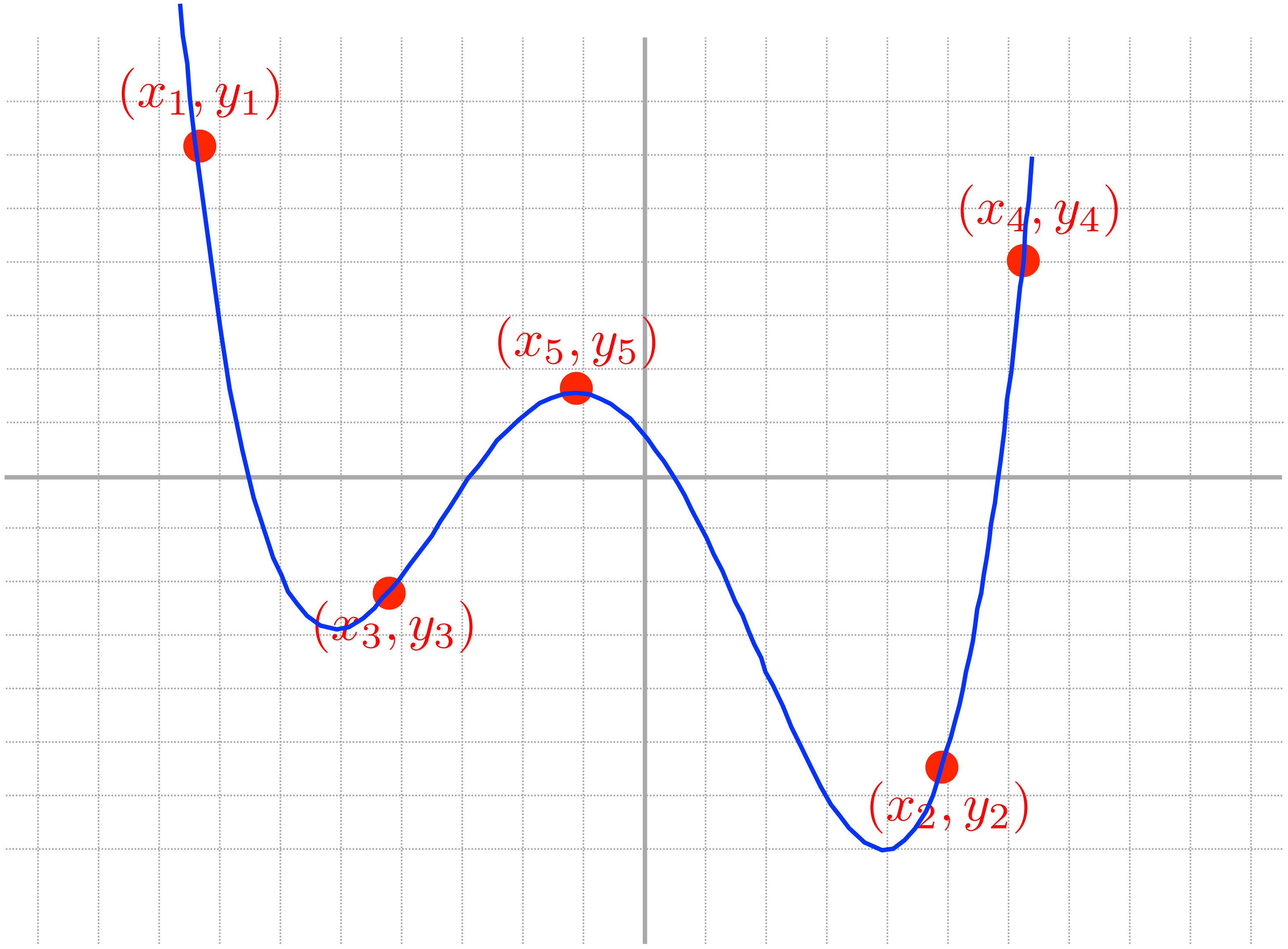
Trouver un polynôme de degré ≤ 4 qui passe par les points ci-dessous



Ca veut dire: Trouver une fonction $y = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ qui passe par les points donnés

Application: l'interpolation

Trouver un polynôme de degré ≤ 4 qui passe par les points ci-dessous



Ca veut dire: Trouver une fonction $y = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ qui passe par les points donnés

Système linéaire

$$
\begin{aligned}
ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e &= y_1 \\
ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e &= y_2 \\
ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e &= y_3 \\
ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e &= y_4 \\
ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e &= y_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\
x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\
x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\
x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\
x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}
$$

Système linéaire

$$\begin{aligned}
ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e &= y_1\\
ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e &= y_2\\
ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e &= y_3\\
ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e &= y_4\\
ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e &= y_5
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1\\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1\\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1\\ x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{connu}} \underbrace{\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{pmatrix}}_{\text{inconnu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5 \end{pmatrix}}_{\text{connu}}$$

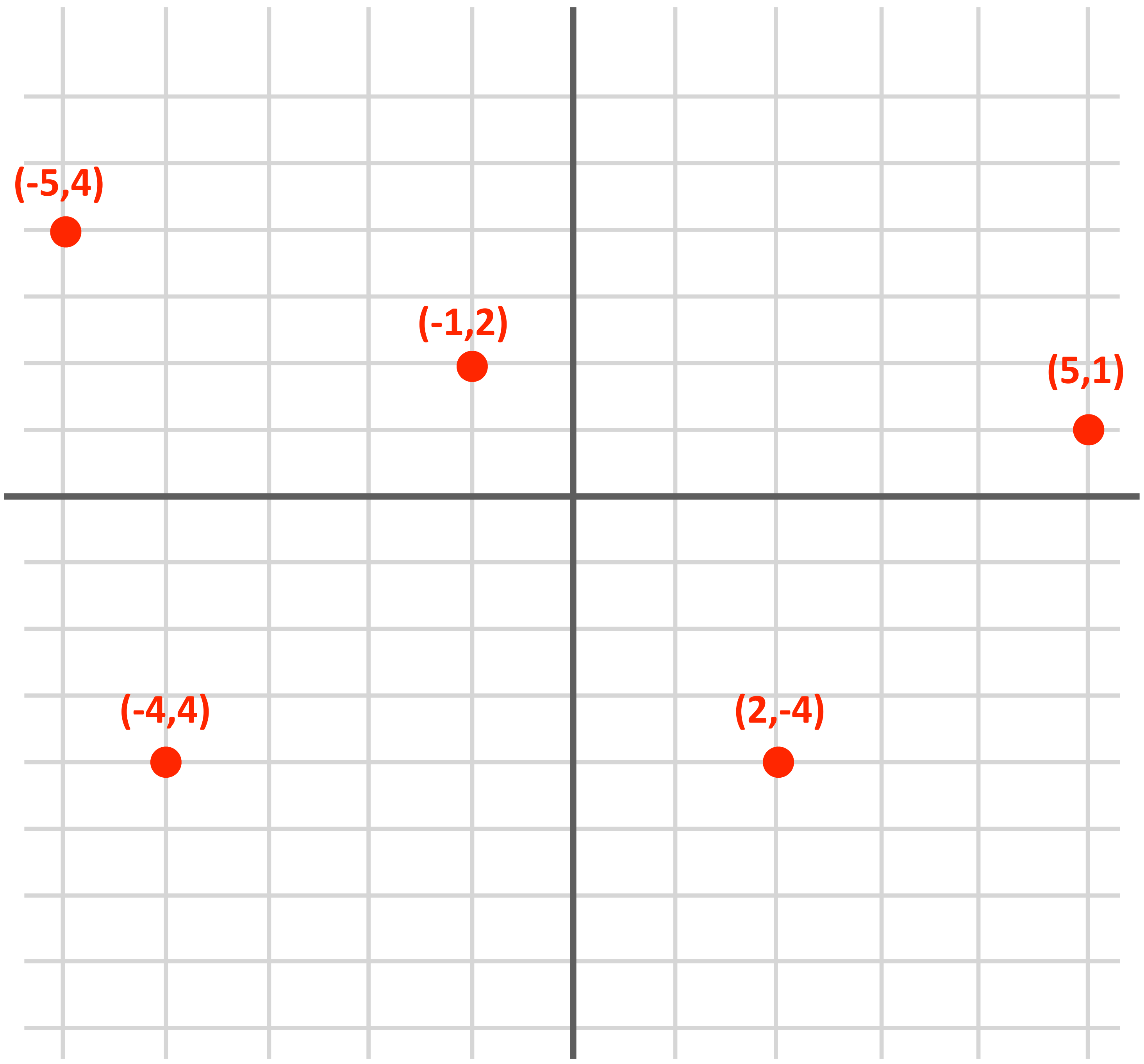
Système linéaire

$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5 \end{array}$$

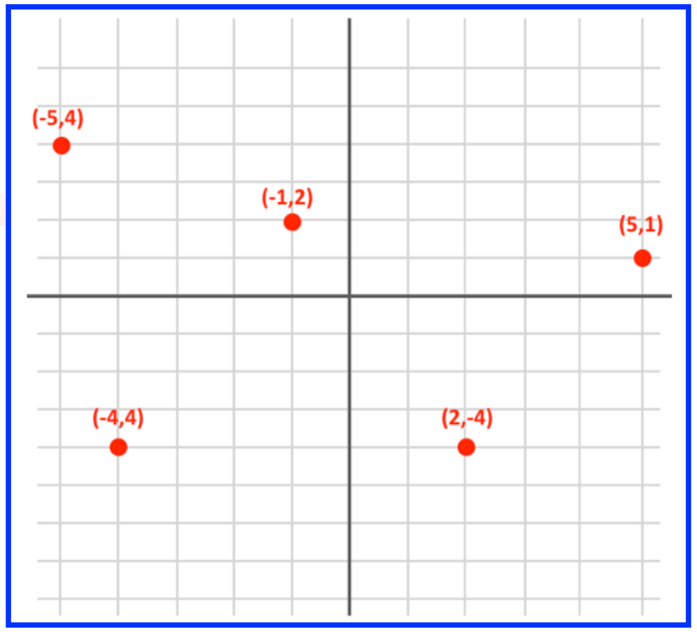
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{connu}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}}_{\text{inconnu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}}_{\text{connu}}$$

Il y a une solution?

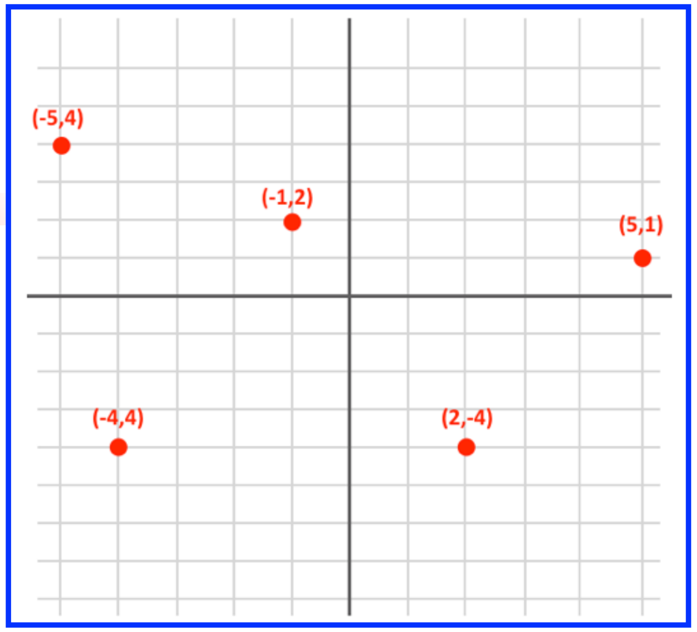
Exemple



Exemple

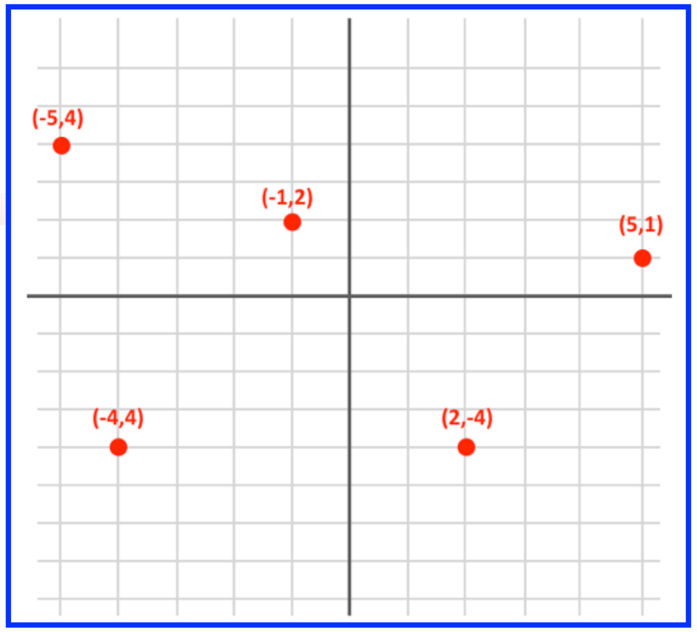


Exemple



$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

Exemple

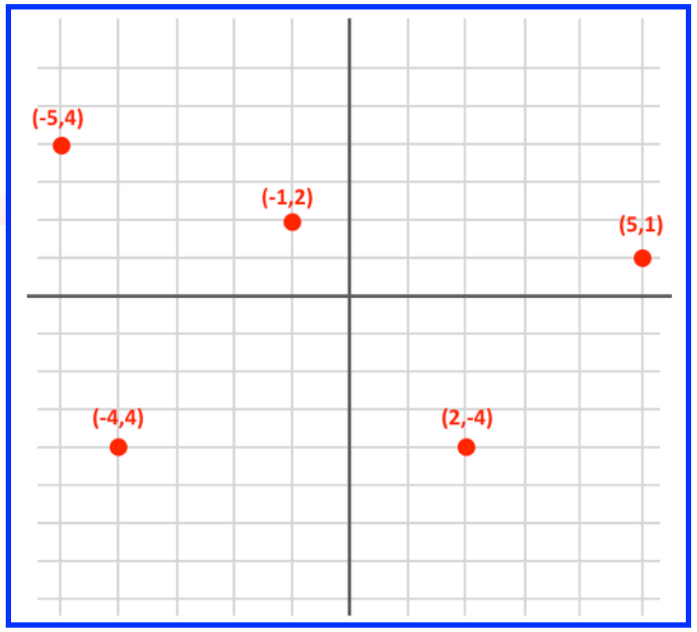


$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl}
ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\
ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\
ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\
ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\
ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5
\end{array}$$

Exemple

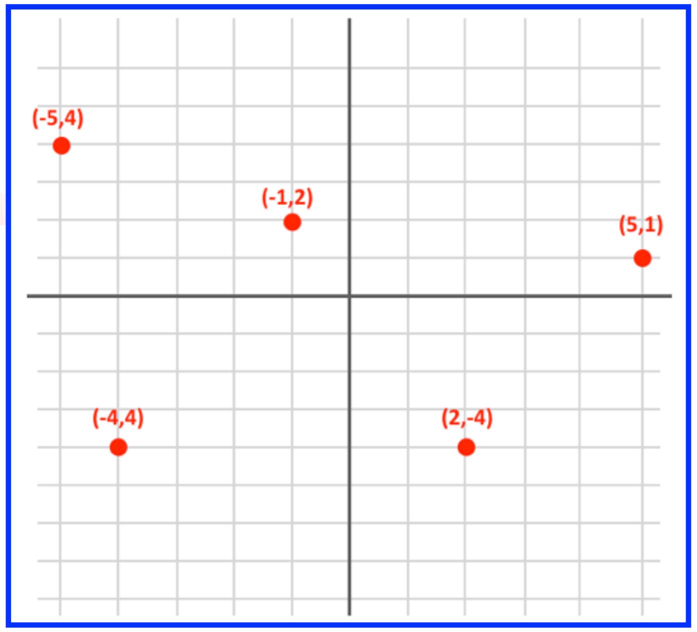


$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\ 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Exemple



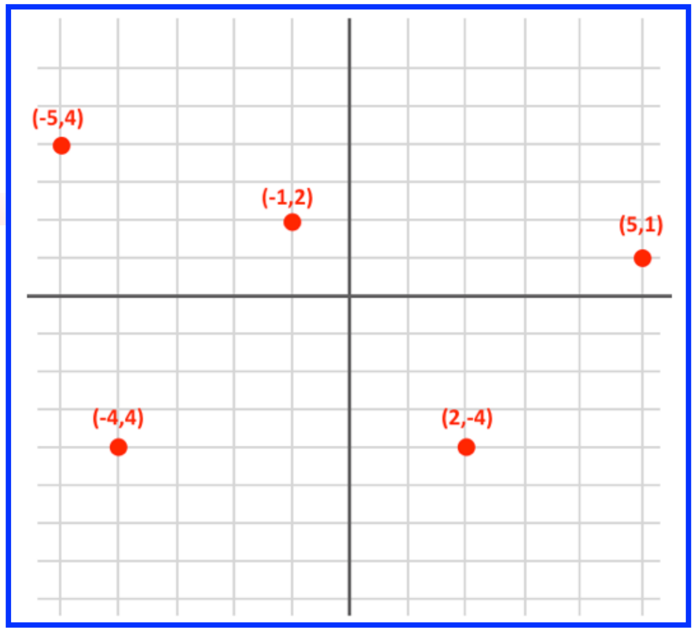
$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\ 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 337/5670 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 131/5670 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -67/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2488/2835 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1460/567 \end{array}\right)$$

Exemple



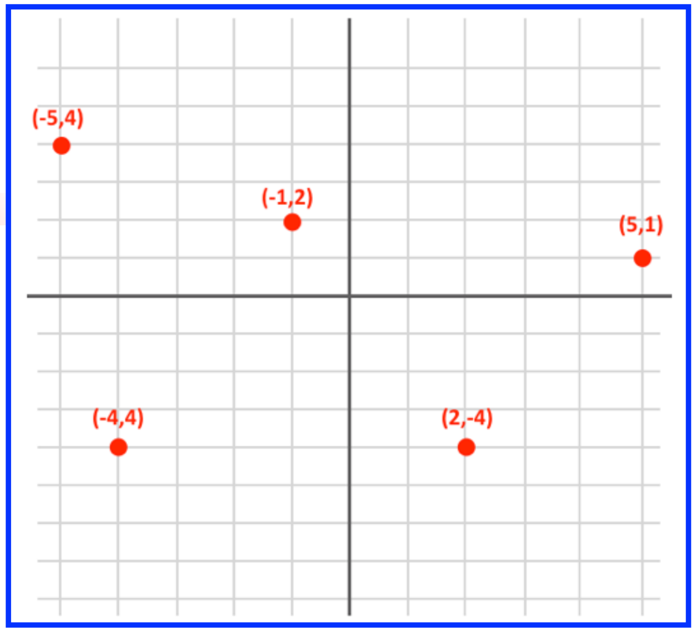
$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\ 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{337/5670} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{131/5670} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-67/45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-2488/2835} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1460/567} \end{array}\right)$$

Exemple



$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

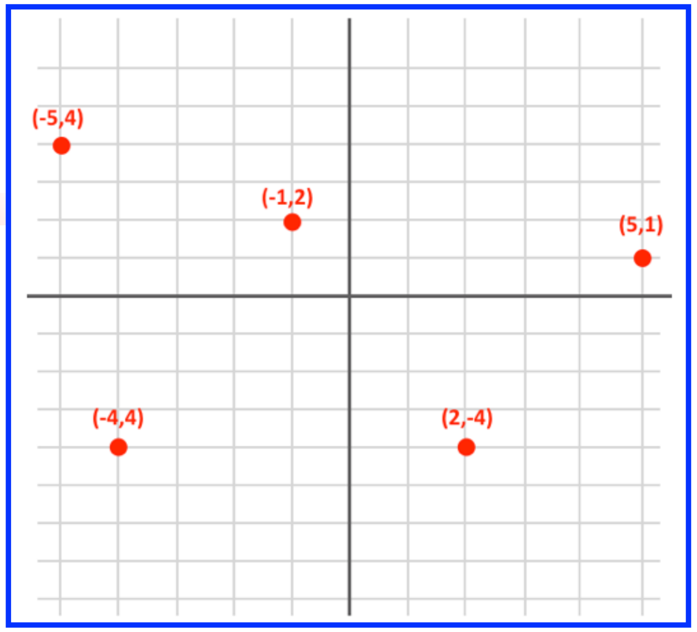
système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\ 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{337/5670} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{131/5670} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-67/45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-2488/2835} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1460/567} \end{array}\right)$$

Polynôme:

Exemple



$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

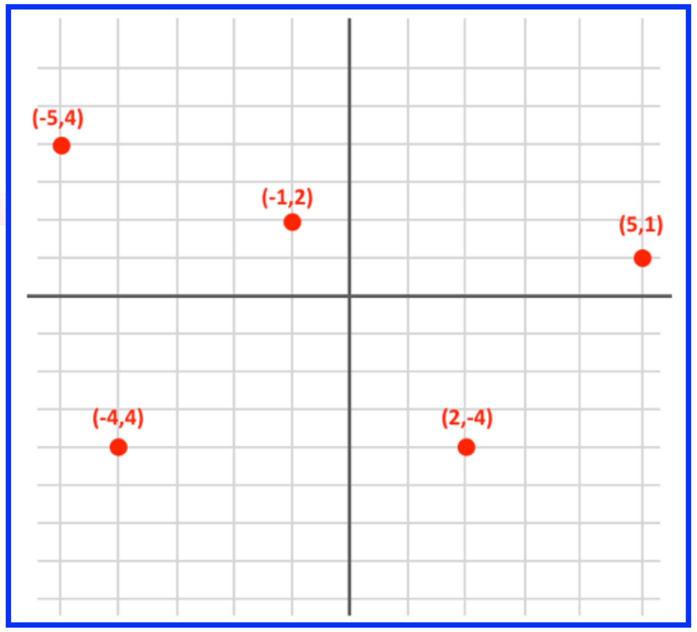
$$\begin{array}{rcl}
ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e & = & y_1 \\
ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e & = & y_2 \\
ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e & = & y_3 \\
ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e & = & y_4 \\
ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e & = & y_5
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \color{red}{a} & \color{green}{b} & \color{blue}{c} & \color{orange}{d} & \color{navy}{e} \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\
256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\
625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|r}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{337/5670} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{131/5670} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-67/45} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-2488/2835} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1460/567}
\end{array}\right)$$

Polynôme:

$$337/5670x^4 + 131/5670x^3 - 67/45x^2 - 2488/2835x + 1460/567$$

Exemple



$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 5$$
$$y_1 = 4, y_2 = -4, y_3 = 2, y_4 = -4, y_5 = 1$$

système d'équations linéaires

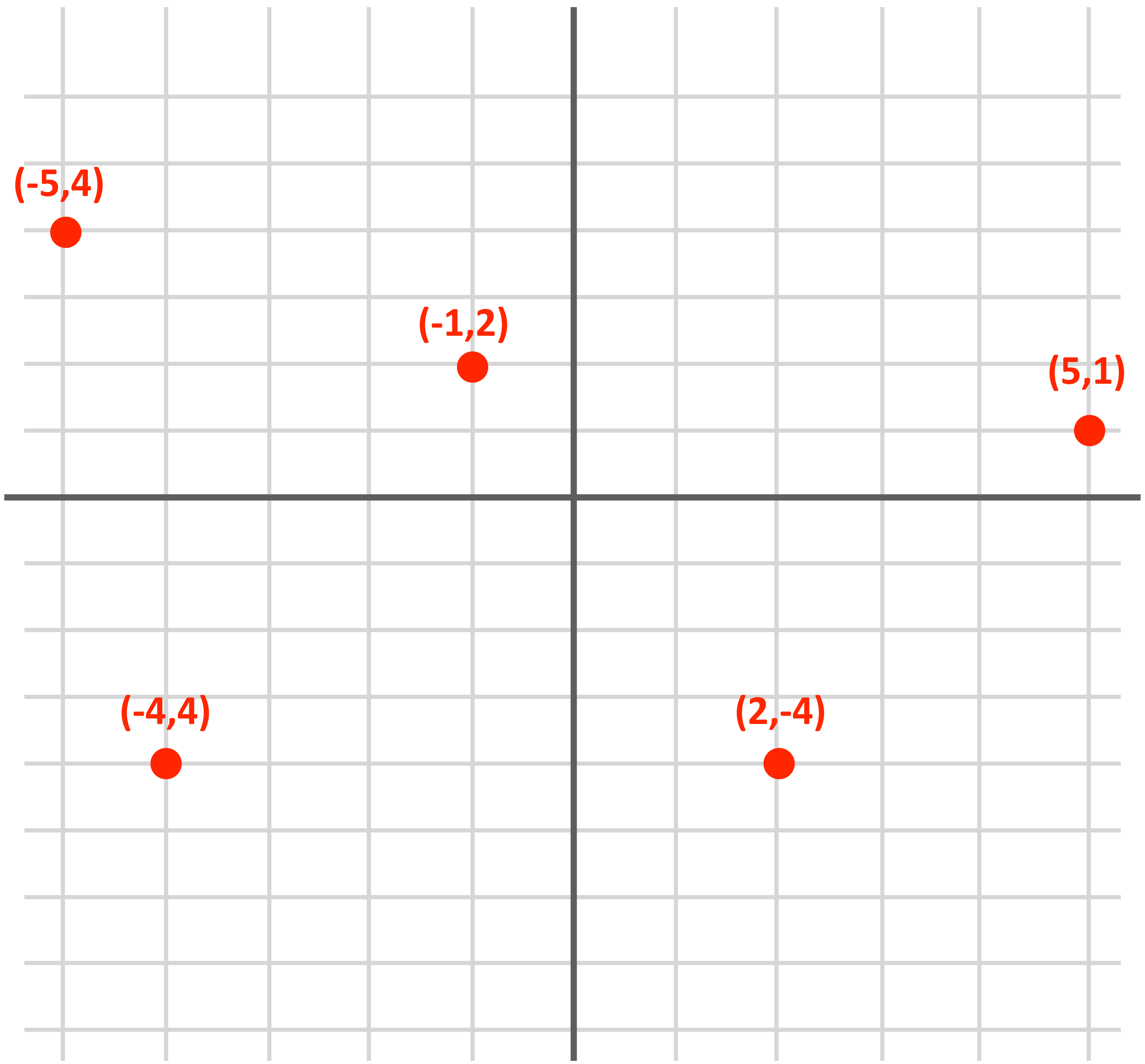
$$\begin{array}{rcl} ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e &=& y_1 \\ ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 + dx_2 + e &=& y_2 \\ ax_3^4 + bx_3^3 + cx_3^2 + dx_3 + e &=& y_3 \\ ax_4^4 + bx_4^3 + cx_4^2 + dx_4 + e &=& y_4 \\ ax_5^4 + bx_5^3 + cx_5^2 + dx_5 + e &=& y_5 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 625 & -125 & 25 & -5 & 1 & 4 \\ 256 & -64 & 16 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{337/5670} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{131/5670} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-67/45} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{-2488/2835} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1460/567} \end{array}\right)$$

Polynôme:

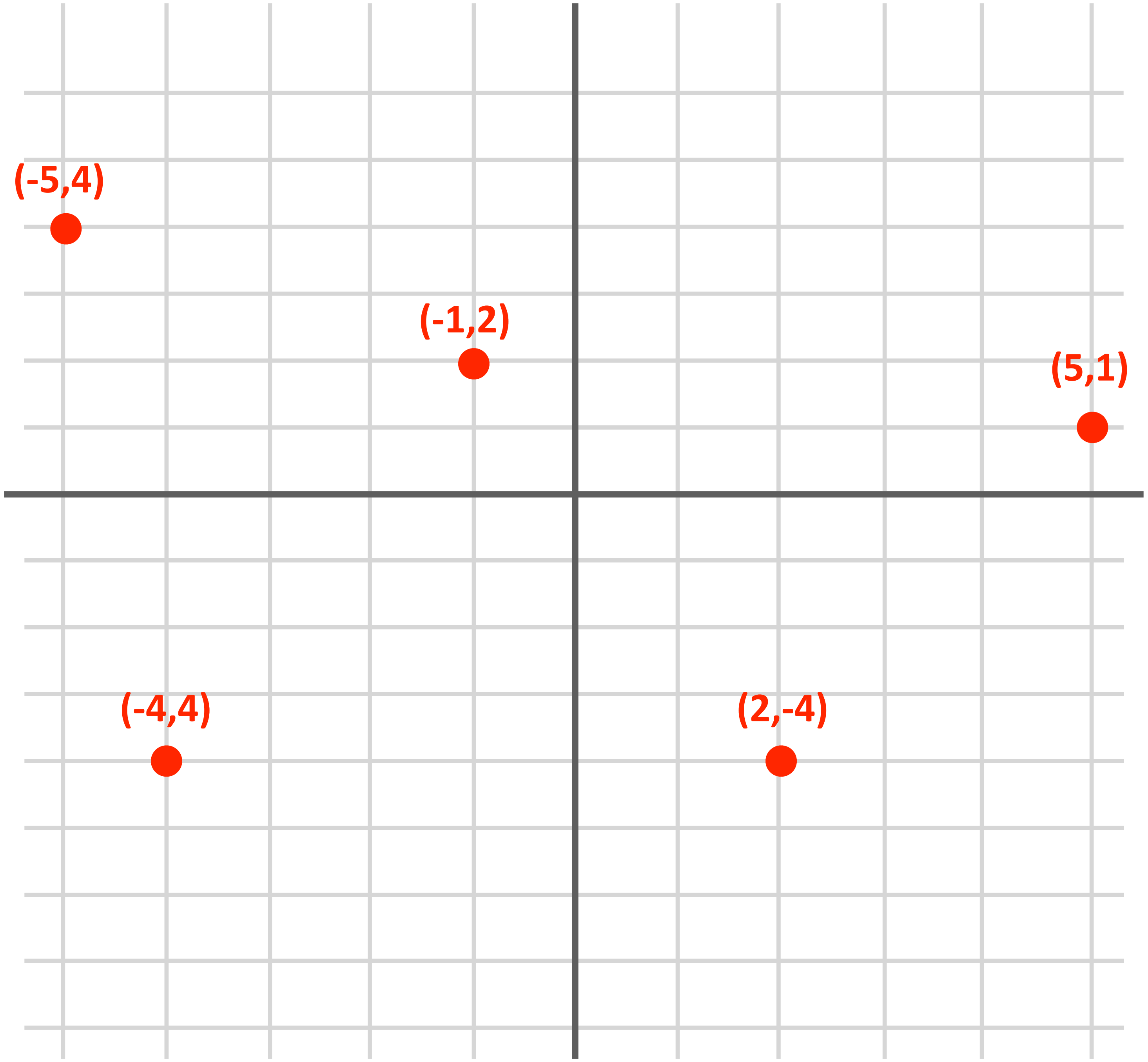
$$\underbrace{\boxed{337/5670}}_{a} x^4 + \underbrace{\boxed{131/5670}}_{b} x^3 \underbrace{\boxed{-67/45}}_{c} x^2 \underbrace{\boxed{-2488/2835}}_{d} x + \underbrace{\boxed{1460/567}}_{e}$$

Exemple



Exemple

$$\boxed{337/5670x^4 + 131/5670x^3 - 67/45x^2 - 2488/2835x + 1460/567}$$



Exemple

$$337/5670x^4 + 131/5670x^3 - 67/45x^2 - 2488/2835x + 1460/567$$