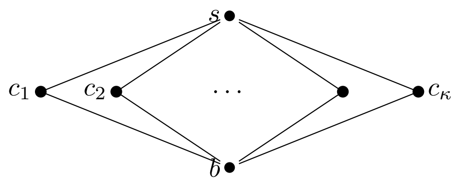
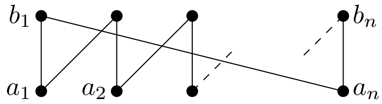
Exercice 4.1. Calculez la largeur des posets suivants :

1. $\mathcal{A}_\kappa$ est une antichaîne de cardinal κ.
2. $\mathcal{M}_\kappa$ correspond au diagramme de Hasse ci-dessous.



3. $\mathcal{C}_n$, où $n \in \mathbb{N}$, qui correspond au diagramme en couronne ci-dessous.



4. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ où X est un ensemble fini.

Exercice 4.2. Soit $(R, \leq)$ un poset de cardinal supérieur à $ab+1$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $(R, \leq)$ possède soit un antichaîne de longueur supérieure à $a+1$, soit une chaîne de longueur supérieure à $b+1$.

Exercice 4.3. (Problème de Littlewood-Offord) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels avec $|a_i| > 1$ pour tout i. Soit

$$e(a_1, \ldots, a_n) := \# \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \mid -1 < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i < 1 \right\} .$$

Montrer que $e(a_1, \ldots, a_n) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Donner un exemple pour lequel il y a égalité.

Exercice 4.4. Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\overline{G} = (V, E^c)$ où le complémentaire de E est pris dans $\binom{V}{2}$. Montrer que si un graphe n'est pas connexe alors son complémentaire est connexe.

Exercice 4.5. Soit G un graphe sur n sommets tel que chaque sommet soit de degré au moins $\lceil (n-1)/2 \rceil$. Montrer que G est connexe.

Exercice 4.6. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.