Exercice 2.1.

1. Soient A et B des ensembles. Montrer que
$$(A \cup B) \sqcup (A \cap B) \leftrightarrow A \sqcup B.$$
2. On suppose dès lors que A et B sont finis. Exprimer $|A \sqcup B|$ en fonction de $|A|$ et $|B|$.
3. Utiliser les questions 1 et 2 pour montrer que
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$
4. Soit C un ensemble fini. Montrer que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$
C'est le *principe d'inclusion-exclusion* pour trois ensembles.
5. Trouver une formule similaire pour 4 ensembles.

Exercice 2.2. Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes qui sont racines de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ensemble que l'on note $\mathbb{Z}[x]^*$. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

1. Soit $\mathbb{Z}[x]_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $n > 0$. Montrer que
$$\mathbb{Z}[x]_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$$
2. Montrer l'égalité suivante et conclure:
$$\mathbb{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]^*} \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}.$$

Exercice 2.3. Pour les relations R suivantes, vérifier si elles sont réflexives, symmétriques et transitives.

i) Soit X un ensemble non vide et $R \subset (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\})$ avec
$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

ii) Soit X un ensemble infini et $R \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ avec
$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow A \Delta B \text{ est dénombrable.}$$

iii) $R \subset (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ avec
$$(n, m) \in R \Longleftrightarrow \exists d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ avec } d \mid n \text{ et } d \mid m.$$

Exercice 2.4. Soient A et B deux ensembles non vides et $R \subset B^A \times B^A$ telle que $(f, g) \in R$ si et seulement si il existe des bijections $h_0 : A \to A$ et $h_1 : B \to B$ avec $f = h_1 \circ g \circ h_0$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. On suppose A et B finis.

i) Soit $f : A \to B$ une application constante, c-à-d $f(A) = \{b\}$. Montrer que la classe de f est l'ensemble des applications constantes.

(Indice: on pourra démontrer puis utiliser le résultat suivant: si $b_0, b_1 \in B$, il existe une bijection $h : B \to B$ avec $h(b_0) = b_1$.)

ii) Soit $f : A \to B$ une application injective. Montrer que la classe de f est l'ensemble de toutes les applications injectives.

(Indice: généraliser le résultat intermédiaire de la partie *i*.)

iii) Soit $f : A \to B$ une application bijective. Montrer que la classe de f est l'ensemble de toutes les applications bijectives.

iv) Montrer que deux applications surjectives ne sont pas toujours équivalentes.

(Indice: prendre par exemple $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, et f telle que $f(0) = f(1) = a$ et $f(2) = f(3) = b$. Construire une application surjective $g : A \to B$ qui ne soit pas équivalente à f).

Exercice 2.5. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.