Exercice 2.1.

1. Soient A et B des ensembles. Montrer que
$$(A \cup B) \sqcup (A \cap B) \leftrightarrow A \sqcup B.$$
2. On suppose dès lors que A et B sont finis. Exprimer $|A \sqcup B|$ en fonction de $|A|$ et $|B|$.
3. Utiliser les questions 1 et 2 pour montrer que
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$
4. Soit C un ensemble fini. Montrer que
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$
C'est le *principe d'inclusion-exclusion* pour trois ensembles.
5. Trouver une formule similaire pour 4 ensembles.

Solution 2.1.

1. On peut trouver une bijection explicite entre $(A \cup B) \sqcup (A \cap B)$ et $A \sqcup B$, mais on peut aussi utiliser les résutats du cours comme suit. On a vu dans le cours que
$$A \leftrightarrow (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \tag{1}$$
et
$$A \cup B \leftrightarrow (A \setminus B) \sqcup B. \tag{2}$$
On vérifie sans problème que de manière générale on a $E \sqcup F \leftrightarrow F \sqcup E$, $E \sqcup (F \sqcup G) \leftrightarrow (E \sqcup F) \sqcup G$ et que si $E \leftrightarrow E'$ et $F \leftrightarrow F'$, alors $E \sqcup F \leftrightarrow E' \sqcup F'$. On en déduit que
$$(A \cup B) \sqcup (A \cap B) \leftrightarrow (A \setminus B) \sqcup B \sqcup (A \cap B) \leftrightarrow A \sqcup B,$$
où la première bijection suit de (2) et la seconde de (1).
2. Par définition, $A \sqcup B = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$, où $\widetilde{A} := \{(a, 0) \mid a \in A\}$ et $\widetilde{B} := \{(b, 1) \mid b \in B\}$. Or $\widetilde{A}$ est clairement en bijection avec A, ce qui implique que $|\widetilde{A}| = |A|$, et de même $|\widetilde{B}| = |B|$. De plus, les ensembles $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ étant disjoints, on a
$$|A \sqcup B| = |\widetilde{A} \cup \widetilde{B}| = |\widetilde{A}| + |\widetilde{B}| = |A| + |B|.$$
3. On raisonne de même que dans la question précédente pour voir que $|(A \cup B) \sqcup (A \cap B)| = |(A \cup B)| + |(A \cap B)|$. Utilisant la question 1, on obtient
$$|(A \cup B)| = |A \sqcup B| - |(A \cap B)| = |A| + |B| - |(A \cap B)|.$$
4.
$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap A \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\
&= -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\
&= +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
&= -|A \cap B \cap C \cap D|.
\end{aligned}$$

Exercice 2.2. Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes qui sont racines de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ensemble que l'on note $\mathbb{Z}[x]^*$. Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

1. Soit $\mathbb{Z}[x]_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $n > 0$. Montrer que
$$\mathbb{Z}[x]_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$$
2. Montrer l'égalité suivante et conclure :
$$\mathbb{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]^*} \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}.$$

Solution 2.2.

1. On définit
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}[x]_n & \to & \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n \\ p(x) = p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0 & \mapsto & (p_n, \ldots, p_0). \end{array}$$
φ est une application (tout élément $p_n x^n + \cdots + p_0$ de $\mathbb{Z}[x]_n$ a une image sous φ, nommément $(p_n, \ldots, p_0)$) injective (si $\varphi(p_n x^n + \cdots + p_0) = \varphi(q_n x^n + \cdots + q_0)$ alors $p_i = q_i$ pour tout i) et surjective (pour tout élément $(p_n, \ldots, p_0)$ de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$, le polynôme $p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0$ est de degré n car $p_n \neq 0$ et est tel que $\varphi(p(x)) = (p_n, \ldots, p_0)$). On a donc
$$\mathbb{Z}[x]_n \leftrightarrow \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n.$$
2. Par définition de $\mathbb{A}$, on a
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} & = & \{z \in \mathbb{C} \mid \exists p \in \mathbb{Z}[x]^* \text{ t.q. } p(z) = 0\} \\ & = & \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]^*} \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}. \end{array}$$
L'ensemble $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$ est dénombrable en tant que produit fini d'ensemble dénombrables. Il en est donc de même pour $\mathbb{Z}[x]_n$ (voir 1.). Ainsi $\mathbb{Z}[x]^* = \mathbb{Z}^* \cup \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{Z}[x]_n$ et donc $\mathbb{Z}[x]$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables. Pour finir, pour tout $p \in \mathbb{Z}[x]^*$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\}$ est fini, de taille au plus $\deg p$. L'ensemble $\mathbb{A}$, étant une union dénombrable d'ensembles finis, est donc lui-même dénombrable.

Exercice 2.3. Pour les relations R suivantes, vérifier si elles sont réflexives, symétriques et transitives.

i) Soit X un ensemble non vide et $R \subset (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\})$ avec
$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

ii) Soit X un ensemble infini et $R \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ avec
$$(A, B) \in R \Longleftrightarrow A \Delta B \text{ est dénombrable.}$$

iii) $R \subset (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ avec
$$(n, m) \in R \Longleftrightarrow \exists d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ avec } d \mid n \text{ et } d \mid m.$$

Solution 2.3.

i) • R est réflexive puisque pour $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, on a $A \cap A = A \neq \emptyset$.
• R est symmétrique puisque

$$(A, B) \in R \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow (B, A) \in R.$$

• R n'est pas transitive. En effet, supposons que $B = A \sqcup C$, où $A, C \neq \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$. Alors $(A, B) \in R$ et $(B, C) \in R$ mais $(A, C) \notin R$.

ii) • R est réflexive puisque $A\Delta A = \emptyset$ est dénombrable.
• R est symmétrique par symmétrie de la différence symmétrique : $A\Delta B = B\Delta A$.
• R est transitive. On suppose que $(A, B) \in R$ et $(B, C) \in R$. Puisque $(A, B) \in R$, on sait que l'ensemble

$$A\Delta B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B) = (A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$$

est dénombrable. En particulier, les ensembles $A \cap B^c \cap C^c$ et $A^c \cap B \cap C$, étant des sous-ensembles d'un ensemble dénombrable, sont dénombrables. De même, puisque $(B, C) \in R$, on sait que l'ensemble

$$B\Delta C = (B\cap C^c)\cup(B^c\cap C) = (A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C)$$

est dénombrable. En particulier, les ensembles $A\cap B\cap C^c$ et $A^c\cap B^c\cap C$ sont dénombrables. Or $A\Delta C$ n'est autre que

$$A\Delta C = (A\cap C^c)\cup(A^c\cap C) = (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap C),$$

et est donc dénombrable en tant qu'union finie d'ensembles dénombrables.
Autre preuve : le fait que R soit transitive découle aussi du fait que

$$A\Delta C = A\Delta(\underbrace{B\Delta B}_{\emptyset})\Delta C = (A\Delta B)\Delta(B\Delta C) \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$$

et comme $(A\Delta B) \cup (B\Delta C)$ est dénombrable, $A\Delta C$ l'est aussi.

iii) • Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, on a $(n, n) \in R$ (il suffit de prendre $d = n$), et donc R est réflexive.
• Pour tous $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a que $(n, m) \in R \Rightarrow (m, n) \in R$ puisqu'un diviseur d commun à n et m est évidemment commun à m et n.
• R n'est pas transitive. En effet, prenons $n = 2$, $m = 6$ et $t = 9$. Alors $(n, m) \in R$ puisque $2 \mid 2$ et $2 \mid 6$, et $(m, t) \in R$ puisque $3 \mid 6$ et $3 \mid 9$, mais $(n, t) \notin R$ puisque 2 et 9 sont premiers entre eux.

Exercice 2.4. Soient A et B deux ensembles non vides et $R \subset B^A \times B^A$ telle que $(f, g) \in R$ si et seulement si il existe des bijections $h_0 : A \to A$ et $h_1 : B \to B$ avec $f = h_1 \circ g \circ h_0$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. On suppose A et B finis.
   i) Soit $f : A \to B$ une application constante, c-à-d $f(A) = \{b\}$. Montrer que la classe de f est l'ensemble des applications constantes.
   (Indice : on pourra démontrer puis utiliser le résultat suivant : si $b_0, b_1 \in B$, il existe une bijection $h : B \to B$ avec $h(b_0) = b_1$.)
   ii) Soit $f : A \to B$ une application injective. Montrer que la classe de f est l'ensemble de toutes les applications injectives.
   (Indice : généraliser le résultat intermédiaire de la partie *i.*)
   iii) Soit $f : A \to B$ une application bijective. Montrer que la classe de f est l'ensemble de toutes les applications bijectives.
   iv) Montrer que deux applications surjectives ne sont pas toujours équivalentes.
   (Indice : prendre par exemple $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, et f telle que $f(0) = f(1) = a$ et $f(2) = f(3) = b$. Construire une application surjective $g : A \to B$ qui ne soit pas équivalente à f).

Solution 2.4.

1. - R est réflexive puisque pour tout $f \in B^A$, $f = Id_B \circ f \circ Id_A$ et donc $(f, f) \in R$.
   - R est symmétrique puisque pour tous $f, g \in B^A$, on a

$$\begin{aligned}(f,g) \in R &\Rightarrow \exists h_0, h_1 \text{ t.q. } f = h_1 \circ g \circ h_0 \\ &\Rightarrow \exists h_0' = h_0^{-1}, h_1' = h_1^{-1} \text{ t.q. } g = h_1' \circ f \circ h_0' \\ &\Rightarrow (g, f) \in R.\end{aligned}$$

   - R est transitive puisque pour tous $f, g, h \in B^A$, si $(f, g) \in R$ et $(g, h) \in R$, alors il existe des bijections h_0, h_0', h_1, h_1' telles que $g = h_1 \circ f \circ h_0$ et $h = h_1' \circ g \circ h_0'$. Mais alors $h = \tilde{h}_1 \circ f \circ \tilde{h}_0$, où $\tilde{h}_0 = h_0 \circ h_0'$ est bijective sur A et $\tilde{h}_1 = h_1' \circ h_1$ est bijective sur B, et on a donc bien $(f, h) \in R$.
2. *i)* On commence par prouver le résultat intermédiaire : les ensembles $B \setminus \{b_0\}$ et $B \setminus \{b_1\}$ ayant la même cardinalité, on peut définir une bijection $h : B \setminus \{b_0\} \to B \setminus \{b_1\}$. On étend cette bijection à une bijection $h_1 : B \to B$ de la manière suivante : $h_1(b_0) = b_1$ et pour tout $b \in B \setminus \{b_0\}$, $h_1(b) = h(b)$.

   On suppose que f est une application constante, c-à-d que $f(a) = b$ pour tout a dans A. Soit $g \in [f]$, alors il existe des bijections h_0, h_1 telles que $g = h_1 \circ f \circ h_0$. Donc pour tout $a \in A$, on a $g(a) = h_1(f(h_0(a))) = h_1(b)$, et donc g est bien une application constante.

   Conversement, soit g n'importe quelle application constante avec $g(A) = \{b'\}$. Alors en prenant $h_0 = Id_A$ et h_1 une bijection sur B telle que $h_1(b) = b'$ (l'existence d'une telle bijection est garantie par notre résultat intermédiaire), on aura $g = h_1 \circ f \circ h_0$ et donc $g \in [f]$.

   Pour A, B finis, on peut donc caractériser la classe d'une application constante $f \in B^A$ comme
$$[f] = \{g \in B^A \mid g \text{ est une application constante}\}.$$

   ii) Soient A et B des ensembles finis, soit $f \in B^A$ une application injective, et soit $g \in [f]$. Il existe donc des bijections h_0, h_1 telles que $g = h_1 \circ f \circ h_0$. g est alors injective. En effet,

$$\begin{aligned}g(a) = g(a') &\Rightarrow h_1(f(h_0(a))) = h_1(f(h_0(a'))) \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} f(h_0(a)) = f(h_0(a')) \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} h_0(a) = h_0(a') \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} a = a',\end{aligned}$$

   où (1) suit de l'injectivité de h_1, (2) de celle de f et (3) de celle de h_0.

Conversement, soit $g \in B^A$ une application injective ; on prouve que $g \in [f]$. On définit $h_0 = Id_A$. On désire donc construire une bijection h_1 sur B telle que $g = h_1 \circ f$. On note que f et g étant toutes deux injectives, on a $|f(A)| = |g(A)| = |A|$. On remarque aussi que comme f est une injection, elle est bijective sur son image, tout comme g. Ainsi l'application $g \circ f^{-1} : f(A) \to g(A)$ est une bijection . On a aussi $|B \setminus f(A)| = |B \setminus g(A)| = |B| - |A|$ (cette quantité est bien positive puisque l'existence d'une application injective de A dans B garantit que $|A| \leq |B|$). Il existe donc une bijection $h : |B \setminus f(A)| \to |B \setminus g(A)|$. On étend cette bijection h à une bijection $h_1 : B \to B$ avec l'aide de la bijection $g \circ f^{-1} : f(A) \to g(A)$ comme suit :
$$h_1(b) = \begin{cases} g(f^{-1}(b)) & \text{si } b \in f(A) \\ h(b) & \text{si } b \in B \setminus f(A). \end{cases}$$

Comme h_1 applique bijectivement $f(A)$ sur $g(A)$ et $B \setminus f(A)$ sur $B \setminus g(A)$, et que B est l'union disjointe de $f(A)$ et $B \setminus f(A)$ et est aussi union disjointe de $g(A)$ et $B \setminus g(A)$, h_1 est une bijection sur B en entier. De plus, $\forall x \in A$, $(h_1 \circ f)(x) = h_1(f(x)) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x)$ Finalement g est bien dans la classe de f.

iii) Puisqu'il existe une bijection $f : A \to B$, les deux ensembles A et B ont le même cardinal. f est injective ; on sait donc par la question *ii* que la classe de f est l'ensemble des application injectives de A dans B. Or comme A et B sont deux ensembles finis de même cardinal, toute injection $g : A \to B$ est forcément une bijection (vu en cours) et donc la classe de f est l'ensemble des bijections de A à B.

iv) On prend par exemple $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, f telle que $f(0) = f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, et g telle que $g(0) = g(1) = g(2) = a$, $g(3) = b$. S'il existait des bijections $h_0 : A \to A$ et $h_1 : B \to B$ telles que $g = h_1 \circ f \circ h_0$, elles devraient satisfaire

$$h_1(f(h_0(0))) = h_1(f(h_0(1))) = h_1(f(h_0(2))) = a \neq b = h_1(f(h_0(3))),$$

et donc

$$f(h_0(0)) = f(h_0(1)) = f(h_0(2)) = h_1^{-1}(a) \neq h_1^{-1}(b) = f(h_0(3)).$$

Or il n'existe pas de permutation des éléments de A telle que l'image de trois d'entre eux sous f soit égale, puisque pour tout $x \in B$, $|f^{-1}(x)| = 2$.

Exercice 2.5. Soit R une relation transitive sur $\mathbb{Z}$ pour laquelle on sait que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ si $|a - b| = 2$ alors $(a, b) \in R$. R est-elle nécessairement une relation d'équivalence ? Même question si $|a - b| \in \{3, 4\}$ implique $(a, b) \in R$.

Solution 2.5. Dans les deux cas, R est transitive par définition et l'on peut montrer facilement en utilisant la transitivité que R est aussi réflexive. En effet, donnons-nous un entier a, alors $(a, a + 2) \in R$ et $(a + 2, a) \in R$, donc par transitivité, $(a, a) \in R$. Le problème est donc de montrer la symétrie.

Dans le premier cas, on peut observer que tous les nombres de même parité $(a, a + 2n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont en relation. Toutefois, ces conditions ne suffisent pas à imposer la symétrie. On peut en effet imaginer la relation $R = \{(2n, 2n'), (2n + 1, 2n' + 1), (2n, 2n' + 1); n, n' \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est pas symétrique.

Dans le second cas, les entiers dont la différence est divisible par 3 ou par 4 sont dans R, et par transitivité, les entiers dont la différence est divisible par $3n + 4m$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$ sont dans R. Mais alors comme 3 et 4 sont premiers entre eux, tout couple d'entiers dont la différence est divisible par le p.g.c.d. de 3 et 4 appartient à R. Autrement dit, tout couple d'entiers appartient à R. Donc R est trivialement une relation d'équivalence.