**Exercice 4.1.**

1. Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un treillis fini. Montrer qu'il existe toujours un maximum et un minimum dans $\mathcal{L}$.
2. Soient $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ deux treillis munis de leur infima et suprema respectifs $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$. Si $f : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ est un isomorphisme de poset, montrer que $\forall x, y \in \mathcal{L}_1, f(x \wedge_1 y) = f(x) \wedge_2 f(y)$ et $f(x \vee_1 y) = f(x) \vee_2 f(y)$.
3. Soient $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$ et $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$ deux treillis munis de leur infima et suprema respectifs $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$ et soit $(\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2, \leq_{12})$ leur produit cartesien. Calculer l'infimum et le supremum $\wedge_{12}$, $\vee_{12}$ de $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ en fonction de $\wedge_1$, $\vee_1$ et $\wedge_2$, $\vee_2$.

**Solution 4.1.**

1. On montre l'existence d'un maximum. Soit $\mathcal{L} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on définit $y_1 := x_1$ et $y_i := x_i \vee y_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, n$. Alors $y_{i-1} \leq y_i$ pour tout $i$, et donc $y_i \leq y_n$ pour tout $i$. De plus, $x_i \leq x_i \vee y_{i-1} = y_i$, ainsi $x_i \leq y_i \leq y_n$ pour tout $i$, et donc $y_n$ est le maximum de $\mathcal{L}$.
   On montre de même l'existence d'un minimum en définissant $z_1 := x_1$ et $z_i := x_i \wedge z_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, n$.
2. Comme $x, y \leq_1 x \vee_1 y$, on a $f(x), f(y) \leq_2 f(x \vee_1 y)$ et donc $f(x \vee_1 y)$ majore $f(x)$ et $f(y)$. De plus, si $f(x), f(y) \leq_2 z$ alors $x, y \leq_1 f^{-1}(z)$ et donc $x \vee_1 y \leq_1 f^{-1}(z)$, et alors $f(x \vee_1 y) \leq_1 z$. Finallement, $f(x \vee_1 y)$ et bien le plus petit des majorants de $f(x)$ et $f(y)$, autrement dit, $f(x \vee_1 y) = f(x) \vee_2 f(y)$. L'égalité duale se montre similairement.
3. On montre que $(x_1, x_2) \vee_{12} (y_1, y_2) = (x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2)$. Comme $x_i, y_i \leq x_i \vee_i y_i$, $i = 1, 2$, on a $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \leq (x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2)$, i.e., $(x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2)$ est un majorant de $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$. Si $(z_1, z_2)$ est un majorant de $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$, alors $x_i, y_i \leq_i z_i$, $i = 1, 2$, et alors on a $x_i \vee_i y_i \leq_i z_i$, i.e., $(x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_1 y_2) \leq_{12} (z_1, z_2)$. Ainsi $(x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2)$ est bien le plus petit majorant de $(x_1, x_2)$ et $(y_1, y_2)$. On montre que $(x_1, x_2) \wedge_{12} (y_1, y_2) = (x_1 \wedge_1 y_1, x_2 \wedge_2 y_2)$ de manière similaire.

**Exercice 4.2.** Soit $m > 0$ et $n > 0$ deux entiers premiers entre eux. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathrm{Div}(mn), |) & \longrightarrow & (\mathrm{Div}(m), |) \times (\mathrm{Div}(n), |) \\ d & \longmapsto & (\mathrm{pgcd}(d, m), \mathrm{pgcd}(d, n)), \end{array}$$

est un isomorphime de posets (on rappelle que $(\mathrm{Div}(m), |) \times (\mathrm{Div}(n), |)$ désigne le poset $(\mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n), \leq_2)$ avec $(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2)$ ssi $a_1 \mid a_2$ dans $(\mathrm{Div}(m), |)$ et $b_1 \mid b_2$ dans $(\mathrm{Div}(n), |)$).

**Solution 4.2.** Soit $n = \prod_{i=1}^s p_i^{e_i}$ et $m = \prod_{j=1}^t q_j^{f_j}$ les décompositions en facteurs premiers de $n$ et $m$. Comme $m$ et $n$ sont premiers entre eux, $p_i \neq q_j$ $\forall i, j$. Si $d \mid n \cdot m$, la décomposition de $d$ en facteurs premiers est donnée par

$$d = \prod_{i=1}^s p_i^{e_i(d)} \cdot \prod_{j=1}^t q_j^{f_j(d)},$$

avec $e_i(d) \leq e_i$ et $f_j(d) \leq f_j$. On a alors

$$f(d) = \left( \prod_{i=1}^s p_i^{e_i(d)}, \prod_{j=1}^t q_j^{f_j(d)} \right).$$

On vérifie facilement que si

$$\begin{array}{rcl} g : \mathrm{Div}(m) \times \mathrm{Div}(n) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(mn) \\ (d_m, d_n) & \longmapsto & d_m \cdot d_n, \end{array}$$

alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{Div}(mn)}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{Div}(m)\times\mathrm{Div}(n)}$. $f$ est donc bien une bijection.

Reste à démontrer que pour $d_1, d_2 \in \mathrm{Div}(mn)$, $d_1 \mid d_2$ ssi $f(d_1) \leq f(d_2)$. Or si $d_1 \mid d_2$, alors pour tous $i, j$ on a $e_i(d_1) \leq e_i(d_2)$ et $f_j(d_1) \leq f_j(d_2)$, et donc on a bien $f(d_1) \leq_2 f(d_2)$. Conversement, si $(d_1, d_1') \leq_2 (d_2, d_2')$, alors $d_1 \mid d_1'$ et $d_2 \mid d_2'$, et donc $e_i(d_1) \leq e_i(d_2)$ et $f_j(d_1) \leq f_j(d_2)$, d'où $g(d_1, d_1') \leq g(d_2, d_2')$. Ainsi on a bien $d_1 \mid d_2 \iff f(d_1) \leq f(d_2)$.

**Exercice 4.3.** Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un treillis fini. Soit $\ll$ une extension linéaire de $\leq$ avec $\mathcal{L} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $a_i \ll a_j$ si $i \leqslant j$. Soit encore $Z$ la matrice carrée de taille $n$ avec $Z_{ij} = 1$ si $a_i \leq a_j$ et $Z_{ij} = 0$ sinon.

1. On pose $N = Z - I_n$. Montrer que $N^n = 0$ et que
$$(I_n + N)(I_n - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{n-1}N^{n-1}) = I_n.$$
2. Pour $k \geq 1$, une liste d'inégalités strictes $a < a_{t_1} < a_{t_2} < a_{t_3} < \ldots < a_{t_{k-1}} < b$ est appelée une chaîne de taille $k$ entre $a$ et $b$ dans $\mathcal{L}$. On note $c_k(a, b)$ le nombre total de telles chaînes et on pose $c_0(a, b) = 1$ si et seulement si $a = b$. Montrer que $(N^k)_{ij} = c_k(a, b)$ pour tout $k \geq 0$ (où $a = a_i$ et $b = a_j$).
3. Montrer que si $\mu$ est la fonction de Möbius bivariée sur $(\mathcal{L}, \leq)$, alors
$$\mu(a, b) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k(a, b).$$

**Solution 4.3.**

1. On a vu en cours que $Z$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Ainsi, $N = Z - I_n$ vérifie $N_{ij} = 0$ pour $i \geq j$. On montre par récurrence que $(N^t)_{ij} = 0$ pour $i \geq j - t + 1$. Pour $t = 1$ c'est fait. Pas de récurrence :
$$\begin{aligned}(N^{t+1})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (N^t)_{ik} N_{kj} \\ &= \sum_{\substack{k: i < k - t + 1 \\ k < j}} (N^t)_{ik} N_{kj}, \qquad (1)\end{aligned}$$
puisque tous les autres termes de la somme (1) sont nuls. Or
$$i < k - t + 1 \text{ et } k < j \implies i < j - t.$$
Donc si $i \geq j - t$, la somme (1) est nulle, et donc $(N^{t+1})_{ij} = 0$ si $i \geq j - (t + 1) + 1$. En particulier, pour $t = n$, on a $(N^n)_{ij} = 0$ quand $i \geq j - n + 1$. Comme $j \leq n$, on a $j - n + 1 \leq 1 \leq i$ pour tous $i, j$, et donc $N^n = 0$.

On a donc
$$\begin{aligned}&(I_n + N)(I_n - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{n-1}N^{n-1}) \\ &\quad = I_n - N + N^2 - N^3 + \ldots + (-1)^{n-1}N^{n-1} \\ &\qquad + N - N^2 + N^3 + \ldots - (-1)^{n-1}N^{n-1} + (-1)^n N^n \\ &\quad = I_n + (-1)^n N^n = I_n.\end{aligned}$$
2. On le prouve par récurrence.
Pas de base : pour $k = 1$, $N^1 = Z - I_n$ et donc $N_{ij} = 1$ si et seulement si $x_i < x_j$. Or ceci est équivalent à dire qu'il existe exactement une chaîne de longueur 1 entre $i$ et $j$, nommément

la chaîne $x_i < x_j$ (toute autre chaîne est de taille strictement supérieure à 1).
Pas de récurrence :

$$
\begin{aligned}
(N^{k+1})_{ij} &= \sum_{\ell=1}^{n} (N^k)_{i\ell} N_{\ell j} \\
&= \sum_{\substack{\ell : x_\ell < x_j \\ \ell \in \{1,\dots,n\}}} c_k(x_i, x_\ell) \\
&= \sum_{\substack{\ell : x_\ell < x_j \\ \ell \in \{1,\dots,n\}}} \left| \{ (a_{t_1}, \dots, a_{t_{k-1}}) \mid x_i < a_{t_1} < \dots < a_{t_{k-1}} < x_\ell \} \right| \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \left| \{ (a_{t_1}, \dots, a_{t_{k-1}}) \mid x_i < a_{t_1} < \dots < a_{t_{k-1}} < x_\ell < x_j \} \right| \\
&= \left| \{ (a_{t_1}, \dots, a_{t_k}) \mid x_i < a_{t_1} < \dots < a_{t_{k-1}} < a_{t_k} < x_j \} \right| \\
&= c_{k+1}(x_i, x_j).
\end{aligned}
$$

3. On sait que $\mu(x_i, x_j) = M_{ij}$ avec $M = Z^{-1}$. De plus, par la question 2, on sait que $Z^{-1} = (I_n + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k N^k$. On a donc

$$
\begin{aligned}
\mu(x_i, x_j) = (Z^{-1})_{ij} &= \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k N^k \right)_{ij} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (N^k)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(x_i, x_j).
\end{aligned}
$$

**Exercice 4.4.**

1. Soit un poset fini $(P, \leq)$ qui contient une antichaîne de taille maximale $s$ et ne possède aucune chaîne de plus de $t$ éléments. Montrer que $|P| \leq st$.
2. Démontrer le Théorème d'Erdös-Szekeres : Soient $a$ et $b$ deux entiers. Toute suite d'au moins $ab+1$ nombres réels contient soit une sous-suite croissante de longueur $a+1$, soit une sous-suite décroissante de longueur $b+1$ (Indication : ordonner la suite en fonction de la taille des nombres réels et de leur position dans la suite).

**Solution 4.4.**

1. Par le théorème de Dilworth, on peut écrire $P$ comme une union disjointe de $s$ chaînes. Comme chaque chaîne contient au plus $t$ éléments, on a bien $|P| \leq st$.
2. Soit $X = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{ab+1}$ une suite de nombre réels ordonnés par l'ordre usuel sur les réels $\leq$. On définit l'ordre $\trianglelefteq$ suivant sur $X$ :

   $$x_i \trianglelefteq x_j \text{ si et seulement si } x_i \leq x_j \text{ et } i \leq j.$$

   Une chaîne dans ce poset correspond donc à une sous-suite croissante de $X$. De plus, une antichaîne de ce poset correspond à une sous-suite décroissante de $X$. En effet, soit $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ une antichaîne avec $i_1 \leq \cdots \leq i_k$. Alors pour tous $i_j \leq i_\ell$, $x_{i_j} || x_{i_\ell}$ pour $\trianglelefteq$, et on doit donc nécessairement avoir $x_{i_j} > x_{i_\ell}$.

   On suppose que $X$ ne possède aucune sous-suite croissante de longueur $a+1$ et aucune sous-suite décroissante de longueur $b+1$. Toute chaîne du poset $(X, \trianglelefteq)$ est donc de taille $\leq a$, et toute antichaîne de taille $\leq b$. Par la question (1), on aura donc $|X| \leq ab < ab+1$, une contradiction.