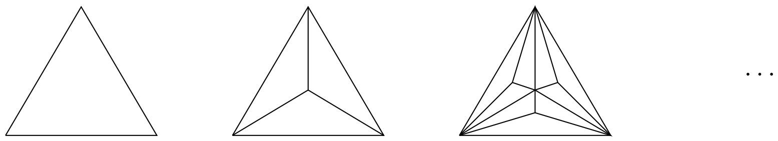
Remarques sur les données des exercices :
Quelques modifications ont été apportées à la donnée des exercices. Notamment :

- Dans le 6.2.1, il faut montrer qu'un arbre à plus de deux sommets possède exactement deux feuilles si et seulement si c'est un chemin **simple**.
- Dans le 6.4.1, il faut donner une borne inférieure n_d sur le nombre de sommets d'un graphe G de circonférence 5 dont le degré de tout sommet est supérieur **ou égal** à d, et dessiner un tel graphe G à exactement n_d sommets quand le degré des sommets est **exactement égal** à $d = 2$ et $d = 3$.

Exercice 6.1. On se propose de démontrer qu'il existe une infinité de graphes avec e et v tendant vers l'infini satisfaisant $e = \frac{g}{g-2}(v-2)$. On considère la suite de graphes suivante :



G_0 G_1 G_2

G_0 est un triangle, et chaque graphe G_i est obtenu du précédent en ajoutant un sommet au centre de chaque face (sauf la face extérieure) et en ajoutant des arêtes reliant ce sommet à chacun des trois sommets de la face qui le contient.

Soit v_n le nombre de sommets de G_n, e_n son nombre d'arêtes et t_n le nombre de faces qu'il contient (sauf la face extérieure). Trouver des formules closes pour t_n, v_n et e_n, et conclure.

Solution 6.1.

1. - $t_0 = 1$ et $t_n = 3t_{n-1}$, d'où $t_n = 3^n$.
   - $v_0 = 3$ et $v_n = v_{n-1} + t_{n-1}$. Donc

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1} + 3^{n-1} \\ &= v_0 + 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} \\ &= 3 + \frac{3^n - 1}{3-1} \\ &= \frac{3^n + 5}{2}. \end{aligned}$$

   - $e_0 = 3$ et $e_n = e_{n-1} + 3t_{n-1}$. Donc

$$\begin{aligned} e_n &= e_{n-1} + 3^n \\ &= e_0 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n \\ &= 3 + 3\frac{3^n - 1}{3-1} \\ &= \frac{3^{n+1} + 3}{2}. \end{aligned}$$

2. On a bien pour tout n

$$\frac{g}{g-2}(v_n - 2) = \frac{3}{1}\left(\frac{3^n+5}{2} - 2\right) = \frac{3^{n+1}+3}{2} = e_n,$$

   et la famille de graphes $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait donc la relation $e \leq \frac{g}{g-2}(v-2)$ avec égalité.

Exercice 6.2. On rappelle qu'un *arbre* est un graphe connexe acyclique. On appelle *feuille* tout sommet de degré 1.

1. Montrer que tout arbre à plus de deux sommets possède au moins deux feuilles, et qu'il possède exactement deux feuilles si et seulement si c'est un chemin simple. (Indication : que vaut la somme des degrés de l'arbre ?)
2. Soient G un graphe et v une feuille de G. Soit G' le graphe obtenu en enlevant de G la feuille v et l'unique arête qui la touche. Montrer que G est un arbre si et seulement si G' est un arbre.
3. Montrer qu'un graphe G est un arbre si et seulement si quels que soient les sommets distincts v et w de G il existe exactement un chemin reliant v et w.
4. Soit G un graphe à plus de deux sommets. Montrer que G est un arbre si et seulement si G n'est pas le graphe complet et ajouter à G une arête quelconque crée un seul cycle.

Solution 6.2.

1. Soient $v_1, \ldots, v_n$ les sommets de l'arbre. Puisque l'arbre a $n-1$ arêtes, on sait que

$$\sum_i \deg v_i = 2(n-1). \tag{1}$$

On note que tout sommet qui n'est pas une feuille est de degré au moins 2. Si l'arbre possédait au plus une feuille, on aurait

$$\sum_i \deg v_i \geq 1 + 2(n-1) > 2(n-1),$$

ce qui est une contradiction.

Un chemin est bien un arbre à exactement deux feuilles ; il reste à prouver l'autre direction. Soit un arbre à exactement deux feuilles, c'est-à-dire deux sommets de degré 1, avec tous les autres sommets de degré au moins 2. Alors

$$\sum_i \deg v_i \geq 2 + 2(n-2) = 2(n-1).$$

Par l'équation (1), on a donc que tous les autres sommets sont exactement de degré 2.
Il reste à prouver qu'un graphe à n sommets avec deux sommets de degré 1 et $n-2$ sommets de degré 2 est bien un chemin. On peut facilement le prouver par induction sur n. Une autre preuve intuitive est la suivante : rajoutons une arête entre les deux feuilles : le graphe obtenu est connexe avec chaque sommet de degré 2, c'est donc un cycle. Le graphe original était donc bien un chemin.

2. Si G est un arbre, G' est encore acyclique. Par ailleurs, si x et y appartiennent à G', ils sont reliés par un chemin dans G qui ne peut passer par v car v est de degré 1. Donc x et y sont encore reliés dans G'. Réciproquement, si G' est connexe, G est trivialement connexe également. D'autre part, ajouter v ne peut pas créer de cycle car v est de degré 1.
3. On raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets. Le cas $n = 2$ est clair. Si G compte $n + 1 \geq 3$ sommets, on retire une feuille de G, ce qui est possible d'après la première question. Par hypothèse de récurence, il n'y a qu'un chemin dans G' entre deux sommets de G', de plus aucun nouveau chemin ne pourrait passer par v à cause de son degré égal à 1. D'autre part, un chemin partant de v passe forcément par la seul arête issue de v puis ne peut se prolonger que d'une seule manière.
4. Si G est un arbre, alors G n'est clairement pas le graphe complet. De plus en ajoutant l'arête disons (u, v), comme il n'y a qu'un unique chemin de u à v, on ne crée qu'un cycle supplémentaire. Réciproquement, on suppose que G n'est pas le graphe complet et que l'ajout de n'importe quelle arête crée exactement un cycle. Alors G est forcément connexe : en effet, s'il n'était pas connexe, il existerait $u, v \in G$ tels qu'il n'existe aucun chemin entre

u et v dans G. Alors l'ajout de l'arête (u, v) ne créerait aucun cycle. On prouve également que G doit être acyclique. En effet, si G contient un cycle $v_0 - \cdots - v_\ell - v_0$ et qu'il existe v_i, v_j non reliés par une arête, l'ajout de l'arête (v_i, v_j) crée au moins deux cycles. Si tous les sommets du cycle sont reliés entre eux par des arêtes, alors il existe au moins un sommet $u \in G$ hors du cycle (puisque G n'est pas complet), relié par une arête à au moins un sommet v_i du cycle (puisque G est connexe). S'il existe v_j dans le cycle qui n'est pas voisin de u, l'ajout de l'arête (u, v_j) crée au moins deux cycles : $u - v_i - v_{i+1} - \cdots - v_j - u$ et $u - v_j - v_{j+1} - \cdots v_i - u$. Si tous les sommets hors du cycle sont reliés à tous les sommets du cycle, alors il existe au moins deux sommets u et w hors du cycle non reliés par une arête, sinon le graphe serait complet. L'ajout de l'arête (u, w) crée plus de deux cycles (au moins ℓ triangles $u - v_i - w - u$).

Exercice 6.3. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire, sans pont et de circonférence $g \geq 4$. Montrer que $|E| \leq 2|V| - 4$.

Solution 6.3.

Solution 1 :

Puisque G n'a pas de pont, toute arête est contenue dans exactement deux faces. En posant f_i le nombre de faces à i arêtes et f le nombre total de faces de G, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} i f_i = 2|E|.$$

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{n} i f_i = \sum_{i=g}^{n} i f_i \geq g \sum_{i} f_i = g \cdot f \geq 4f,$$

d'où $f \leq |E|/2$. De plus, en utilisant la formule d'Euler, on a

$$2 = f - |E| + |V| \leq |E|/2 - |E| + |V|,$$

ce qui nous donne $|E|/2 \leq |V| - 2$.

Solution 2 :

Il suffit de remarquer que $\frac{g}{g-2} \leq \frac{4}{4-2} = 2$ puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{x-2}$ est décroissante sur son domaine de définition, et d'appliquer le théorème du cours qui dit que $|E| \leq \frac{g}{g-2}(|V| - 4)$. Cette solution vaut également pour les graphes contenant des ponts.

Exercice 6.4.

1. Donner une borne inférieure n_d sur le nombre de sommets d'un graphe G de circonférence 5 dont le degré de tout sommet est supérieur ou égal à d. Dessiner un tel graphe G à exactement n_d sommets où tous les sommets sont de degré exactement égal à $d = 2$ et $d = 3$.
2. Même question si G est de circonférence 4.

Solution 6.4.

1. On considère un sommet v du graphe. v a au moins d voisins ; on considère ses d premiers voisins $v_1, \ldots, v_d$. Chaque v_i a au moins $d-1$ voisins distincts de v ; appelons $v_{i1}, \ldots, v_{i,d-1}$ les $d-1$ premiers tels voisins de v_i. Les sommets v, $\{v_i\}$ et $\{v_{ij}\}$ doivent être tous distincts, sinon il existerait un cycle de longueur inférieure à 5. G contient donc au moins $1 + d + d(d-1) = d^2 + 1$ sommets distincts.
   Pour le cas $d = 2$, on prend un cycle de longueur 5. Pour le cas $d = 3$, on prend le graphe de Petersen.

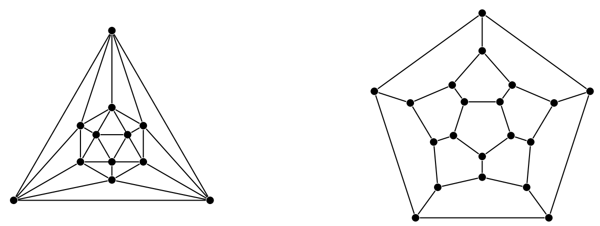
2. On considère un sommet v du graphe et soient $w, v_2, \ldots, v_d$ ses d premiers voisins. Comme G est de circonférence 4, $v_2, \ldots, v_d$ ne peuvent pas être voisins de w (sinon il existerait un cycle de taille 3). Les $d-1$ premiers voisins de w distincts de w sont donc tous différents de $v_2, \ldots, v_d$. En comptant ces voisins avec v, w, et $v_2, \ldots, v_d$, on obtient que G contient au moins $1+1+(d-1)+(d-1) = 2d$ sommets. Pour $d = 2$, on prend un cycle sur 4 sommets. Pour $d = 3$, on prend $K_{3,3}$. En fait, on peut construire une infinité de tels graphes : pour tout d, on prend le graphe biparti complet $K_{d,d}$.

Exercice 6.5. Soit G un graphe planaire tel que tout sommet soit de degré pair. Montrer qu'on peut colorier les faces de G avec 2 couleurs de telle sorte que deux faces partageant une arête soient de couleurs différentes. (Indice : faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

Solution 6.5. On raisonne par récurrence sur le nombre m d'arêtes du graphe. Pour $m = 0$, il y a qu'une face infinie et on peut trivialement colorier les faces du graphe avec deux couleurs (même une seule). Supposons maintenant que l'affirmation soit vraie pour tout $i < m$ et prenons un représentation planaire d'un graphe avec m arêtes dont tous les degrés sont pairs. On choisit une face f de ce graphe et on enlève toutes les arêtes de son bord pour obtenir un graphe G'.

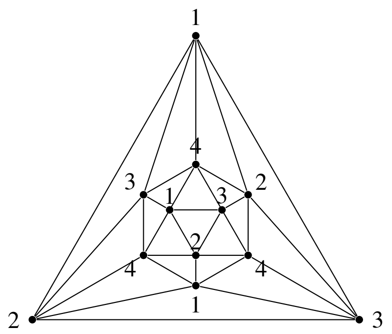
On peut remarquer que la face f de G est strictement incluse dans une face f' de G' ; f' est la réunion de f et des faces contigües de f. De plus, tous les degrés de G' sont encore pairs, car on a juste diminué le degré de certains sommets de 2. Par hypothèse de récurrence on peut colorier les faces de G' avec deux couleurs. On colorie alors la face f de la couleur opposée à celle de f', les faces contigües restant de la même couleur. Ce nouveau coloriage est bien un 2-coloriage. Il est par ailleurs admissible. En effet, prenons une arête quelconque de G. Soit elle appartient à f, alors elle est intérieure à f'. Or on a changé la couleur de f par rapport à celle de f'. Soit cette arête appartient à G' et par hypothése de récurrence, les couleurs des faces de part et d'autre sont distinctes.

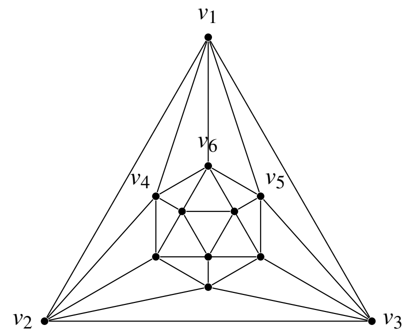
Exercice 6.6. Trouver le nombre chromatique de l'icosaèdre (gauche) et du dodécaèdre (droite).



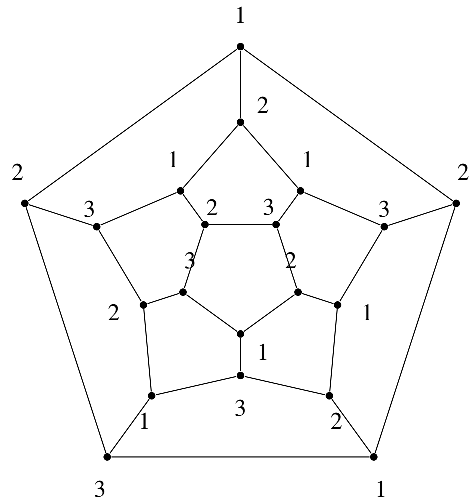
Solution 6.6.

- D'une part, on peut trouver un coloriage de l'icosaèdre à 4 couleurs (ci-dessous à gauche), d'où le nombre chromatique de l'icosaèdre est inférieur ou égal à 4. D'autre part, on ne peut pas colorier l'icosaèdre avec 3 couleurs. En effet, considérons la numérotation des sommets ci-dessous à droite et supposons que l'on peut colorier le graphe avec 3 couleurs. v_1, v_2 et v_3 doivent être coloriés de trois couleurs différentes : sans perte de généralité, supposons qu'ils sont coloriés avec les couleurs 1, 2 et 3 respectivement. v_4, étant adjacent à des sommets de couleurs 1 et 2, doit obligatoirement être de couleur 3. De même, v_5 doit être de couleur 2. Mais alors v_6 , étant adjacent à des sommets de couleurs 1, 2 et 3, ne peut être colorié avec aucune de ces trois couleurs, une contradiction.





- D'une part, on peut trouver un coloriage du dodécaèdre à 3 couleurs. D'autre part, le graphe contient C_5 comme sous-graphe, et son nombre chromatique est donc au moins 3. Ainsi, le nombre chromatique du dodécaèdre est égal à 3.



Exercice 6.7. Montrer qu'un graphe G a au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes (où $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G).

Solution 6.7. On peut observer que si c est un coloriage du graphe G avec $\chi(G)$ couleurs, alors pour chaque couple de couleurs utilisées c_1 et c_2, il existe une arête reliant un sommet de couleur c_1 à un sommet de couleur c_2. En effet, si tel n'était pas le cas, en prenant une seule et même couleur à la place de c_1 et c_2, on obtiendrait encore un coloriage avec $\chi(G) - 1$ couleurs, ce qui est absurde. Ainsi le graphe contient au moins $\binom{\chi(G)}{2}$ arêtes.