ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
Section d'Informatique et de Systèmes de Communication

Corrigé de la série 2 28 Septembre 2007

1. Induction

a) Pour $n = 1$ l'affirmation est clairement vraie. Supposons maintenant le résultat prouvé pour n et montrons-le pour $n+1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \\ &\geq (1+nx)\cdot(1+x), \quad \text{puisque } x \geq -1 \text{ et par hypothèse d'induction} \\ &= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat.

b) Il est trivial de vérifier le résultat pour $n = 1$. Montrons-le pour $n+1$ sous l'hypothèse qu'il est vrai pour n. Nous commençons par l'inégalité à gauche.
Par l'utilisation de l'hypothèse d'induction nous avons

$$\begin{aligned}2(\sqrt{n+2}-1) &= 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}-1) \\ &< 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

L'affirmation est donc prouvée si nous montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{1}$$

Comme la fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave, nous avons, par le développement limité autour de $n+1$,

$$\sqrt{n+2} \leq \sqrt{n+1} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

En insérant ceci dans (1), nous obtenons l'inégalité

$$2\left(\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

qui est certainement vraie. Donc (1) est aussi vraie, et l'affirmation en suit.
Il reste à prouver la deuxième inégalité. Nous supposons de nouveau le résultat prouvé pour n et considérons le cas pour $n+1$. Alors

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour conclure, il reste donc à voir que

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}. \tag{2}$$

Nous pourrions de nouveau utiliser la convexité de la racine et un développement limité autour de $n+1$. Alternativement nous pouvons prendre la démarche suivante pour prouver (2) : en multipliant par $\sqrt{n+1}$ et soustraction de 1, on obtient l'inégalité équivalente

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2(n+1) - 1.$$

On vérifie que cette identité est vraie en l'élevant au carré et en simplifiant ensuite. Nous omettons ces calcul faciles. Il en suit que l'inégalité (2) est vraie, terminant la preuve.

2. Relations de récurrence et nombres de Fibonacci

a)

$$\begin{aligned}
S(1) &= \{(0), (1)\}\\
S(2) &= \{(01), (10), (11)\}\\
S(3) &= \{(010), (011), (101), (110), (111)\}\\
S(4) &= \{(0101), (0110), (0111), (1010), (1011), (1101), (1110), (1111)\}
\end{aligned}$$

b) Pour construire un élément de $\{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 1\}$, on peut prendre n'importe quel élément $(x_1, \ldots x_{n-1}) \in S(n-1)$ et ajouter l'élément $x_n = 1$. En effet une suite construite de cette façon n'aura pas deux zéros consécutifs (puisqu'il n'y a jamais deux zéros conséscutifs dans un élément de $S(n-1)$). De plus il est clair que tous les éléments qui nous interessent peuvent être construits de cette façon. Il y a donc autant d'éléments dans $\{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 1\}$ que dans $S(n-1)$.

Pour construire un élément de $\{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 0\}$ on ne peut pas faire comme ci dessus. En effet, si l'élément $(x_1, \ldots x_{n-1}) \in S(n-1)$ qu'on choisit se termine par 0 alors la suite aurait deux zéros consecutifs. Pour une suite dans $S(n)$ dans laquelle $x_n = 0$ on doit donc avoir $x_{n-1} = 1$.

On peut donc construire un élément de $\{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 0\}$ en prenant un élément de $S(n-2)$ et ajouter $x_{n-1} = 1$ et $x_n = 0$. Tous les éléments qui nous interessent peuvent être construits de cette façon, il y en a donc autant que d'éléments de $S(n-2)$.

c) On voit que les deux ensembles de la question précédante forment une partition de $S(n)$ (c'est-à-dire que tous les éléments de $S(n)$ sont soit dans l'un, soit dans l'autre, mais aucun élément n'est dans les deux), on a donc

$$\begin{aligned}
|S(n)| &= |\{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 0\}| + \{(x_1, \ldots x_n) \in S(n) \mid x_n = 1\}|\\
&= F(n-1) + F(n-2)
\end{aligned}$$

3. La notation O

a) On pose $f(n) = n^2 + 100$, $g(n) = n^2$. Si on prend $n_0 = 1$ et $c = 101$, on voit que $c \cdot g(n) - f(n) = 101 \cdot n^2 - n^2 - 100 = 100 \cdot (n^2 - 1) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. On a donc

$f(n) \leq c \cdot g(n)$ pour tout $n \geq n_0$. (Bien sûr, il y a beaucoup de valeurs possibles pour n_0 et c.) Ainsi nous avons montré que $f(n) = O(g(n))$.

Maintenant si on pose $n_0' = 1$ et $c' = 1$ on voit que pour tout $n \geq n_0'$ on a $n^2 \leq c' \cdot (n^2 + 100)$, et donc $g(n) = O(f(n))$.

On a donc par définition $f(n) = \theta(g(n))$.

b) Il existe $n_0, n_0' \in N$ et $c, c' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tels que :

$$n \geq n_0 \implies f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$n \geq n_0' \implies g(n) \leq c' \cdot h(n)$$

Prenons $n_0'' = \max(n_0, n_0')$ et $c'' = c \cdot c'$. On voit que si $n \geq n_0''$ alors on aura $n \geq n_0$ et $n \geq n_0'$, et donc

$$n \geq n_0'' \implies f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c \cdot c' \cdot h(n) = c'' \cdot h(n)$$

et donc par définition $f(n) = O(h(n))$.

c) On rappelle que $f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = O(g(n))$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n)}{n} = 0$. Donc $\log_2(n) = o(n)$, donc $\log_2(n) = O(n)$ et donc par définition $n = \Omega(\log_2(n))$.

d) Par hypothèse il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec :

$$\begin{array}{rcl} n \geq n_0 & \implies & f(n) \leq c \cdot g(n) \\ & \implies & a \cdot f(n) \leq a \cdot c \cdot g(n) \\ & \implies & a \cdot f(n) \leq \frac{b}{b} a \cdot c \cdot g(n) \\ & \implies & a \cdot f(n) \leq \frac{ac}{b} \cdot b \cdot g(n) \\ & \implies & a \cdot f(n) \leq c' \cdot b \cdot g(n) \end{array}$$

où $c' = \frac{ac}{b}$. Donc en mettant n_0 et c' dans la définition on voit que $a \cdot f(n) = O(b \cdot g(n))$.

e) On rappelle de nouveau que $f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = O(g(n))$. Posons $f(n) = n^d$ et $g(n) = a^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{a^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \frac{n^d}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{d \cdot \ln n - n \cdot \ln a} = 0$$

puisque $a > 1$, donc $\ln a > 0$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} d \cdot \ln n - n \cdot \ln a = -\infty$$

Ainsi puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ on a $f(n) = o(g(n))$, et donc $f(n) = O(g(n))$.

f)

	$f(n)$	$g(n)$	$f = O(g)$	$f = \Omega(g)$	$f = \theta(g)$	$f = o(g)$
(1)	$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$	Vrai	Faux	Faux	Vrai
(2)	$\ln(n)$	$\ln^2(n)$	Vrai	Faux	Faux	Vrai
(3)	$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$	Faux	Vrai	Faux	Faux
(4)	2^n	$n!$	Vrai	Faux	Faux	Vrai
(5)	$\log_2(n)$	$\log_3(n)$	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
(6)	$\ln(n)$	$\ln\ln(n)$	Faux	Vrai	Faux	Faux
(7)	$2^{\ln(n)}$	n^2	Vrai	Faux	Faux	Vrai
(8)	2^n	$n^{\ln\ln(n)}$	Faux	Vrai	Faux	Faux
(9)	$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$	Vrai	Faux	Faux	Vrai

Nous utilisons souvent le fait que

$$f(n) = o(g(n)) \implies f(n) = O(g(n))$$

Il est souvent plus rapide de montrer que $f(n) = o(g(n))$.

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/100}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-49/100} = 0.$$

Donc $f(n) = o(g(n))$.

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

Donc $f(n) = o(g(n))$.

(3) On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{2\ln\ln n - (1/2)\ln n} \lim_{n\to\infty} e^{h(n)} = 0$$

En effet, si on pose le changement de variable $x = \ln n$ on voit que $\lim_{n\to\infty} x = \infty$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} 2\ln\ln n - \frac{1}{2}\ln n = \lim_{x\to\infty} 2\ln x - \frac{x}{2} = -\infty$$

Donc $g(n) = o(f(n))$.

(4) Pour tout n on a $\frac{2^n}{n!} > 0$, et pour tout $n > 3$:

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot \ldots \cdot n} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \ldots \cdot 2}{3 \cdot \ldots \cdot n} < 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2}$$

Or on sait que

$$\lim_{n\to\infty} 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2} = 0$$

Donc $f(n) = o(g(n))$.

(5) On a :

$$\log_2 n = \frac{\log_3 n}{\log_3 2}$$

Quand on a $f(n) = k \cdot g(n)$ pour une constante k on a toujours $f(n) = \theta(g(n))$.

(6) Si on pose le changement de variable $x = \ln n$, on voit d'abord que $\lim_{n\to\infty} x = \infty$. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

et donc $g(n) = o(f(n))$.

(7) On voit d'abord que $2^{\ln(n)} = 2^{\frac{\log_2(n)}{\log_2(e)}} = n^{\frac{1}{\log_2(e)}}$. On remarque ensuite que $\frac{1}{\log_2(e)} \simeq 0.693 < 2$. Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\ln(n)}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{\log_2(e)}}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = 0$$

puisque $\alpha = \frac{1}{\log_2(e)} - 2 < 0$. Et donc on a $f(n) = o(g(n))$.

(8) On voit que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln \ln n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \ln n \cdot \ln n - n \ln 2} = 0$$

et donc $g(n) = o(f(n))$.

(9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sqrt{\ln n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{\ln n}\cdot \ln 2 - \frac{1}{2}\ln n} = 0$$

et donc $f(n) = o(g(n))$.

4. Relations de récurrence

a) On utilise le Théorème 7 du cours. On voit que la condition (a) est vérifiée puisque $T(n)$ est montone croissante, et la condition (b) est vérifiée avec

$$\begin{aligned} a &= 10 \\ b &= 1/2 \\ c &= 3 \\ d &= 10^3 \end{aligned}$$

On voit ensuite que $a^b = \sqrt{10} > 3 = c$, on est donc dans le cas (3) du Théorème, donc $T(n) = O(n^b)$, i.e. $T(n) = O(\sqrt{n})$

b) Quand $n = 2^k$ on a :

$$\begin{array}{rcl} T(2^k) & = & T(2 \cdot 2^{k-1}) \\ & = & 2^{k-1} \cdot T(2^{k-1}) \\ & = & 2^{k-1} \cdot T(2 \cdot 2^{k-2}) \\ & = & 2^{k-1} \cdot 2^{k-2} \cdot T(2^{k-2}) \\ & \vdots & \vdots \\ & = & \prod_{i=1}^{k-1} 2^i \cdot T(1) \\ & = & 2^{\sum_{i=1}^{k-1} i} \cdot T(1) \\ & = & 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot T(1) \\ & = & 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \end{array}$$

Ensuite si on pose $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$, on a

$$\begin{array}{rcll} n \leq 2^{k+1} & \Longrightarrow & T(n) \leq T(2^{k+1}) & \\ & \Longrightarrow & T(n) \leq 2^{\frac{k(k+1)}{2}} & \\ & \Longrightarrow & T(n) \leq 2^{\frac{\log_2 n(\log_2(n)+1)}{2}} & (\text{puisque } k \leq \log_2 n) \end{array}$$

Finalement on voit que

$$\begin{array}{rcl} 2^{\frac{\log_2 n(\log_2(n)+1)}{2}} & = & (2^{\log_2^2 n + \log_2 n})^{1/2} \\ & = & ((2^{\log_2 n})^{log_2 n} \cdot 2^{log_2 n})^{1/2} \\ & = & (n^{\log_2 n} \cdot n)^{1/2} \\ & = & n^{\frac{\log_2(n)+1}{2}} \end{array}$$