

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Sections d'Informatique et de Systèmes de Communication

Série d'exercices 12

12 Dec. 2011

1. Augmenter les poidsSoit $G = (V, E)$ un graphe et T un arbre couvrant minimal de G .

- a) Si on augmente le poids de chaque arête de G par une constante c , est-ce que l'arbre T reste minimal? Justifiez votre réponse.
- b) Si on diminue le poids de l'une des arêtes de T , T est-il encore un arbre couvrant minimal de G ? Justifiez votre réponse.

2. Deuxième meilleur arbre couvrantSoit $G = (V, E)$ un graphe connexe non-orienté avec une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que tous les poids des arêtes sont distincts.Soit \mathcal{T} l'ensemble de tous les arbres couvrants de G et soit T' un arbre couvrant minimal de G . On dit qu'un arbre couvrant T est *deuxième meilleur* si $w(T) = \min_{T'' \in \mathcal{T} \setminus \{T'\}} \{w(T'')\}$.

- a) Montrer que l'arbre couvrant minimal est unique, mais que le deuxième meilleur arbre ne l'est pas en général.
- b) Soit T l'arbre couvrant minimal de G . Démontrer qu'il existe des arêtes $(u, v) \in T$ et $(x, y) \in E \setminus T$ telles que $(T \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(x, y)\}$ est un deuxième meilleur arbre couvrant de G .

3. Attribution optimaleSoient 15 étudiants, dont 6 des informaticiens que nous appelons I_1, \dots, I_6 et 9 des physiciens P_1, \dots, P_9 . La résidence d'étudiants doit leur attribuer des chambres C_1, \dots, C_6 dont C_1 et C_2 sont des chambres doubles et C_3, \dots, C_6 sont des chambres simples. Chaque étudiant a une liste de chambres acceptables pour lui:

Étudiant	Chambres acceptables
P_1	C_1, C_3
P_2	C_1, C_2, C_3, C_4, C_5
P_3	C_4, C_5
P_4	C_2
P_5	C_3, C_6
P_6	C_1, C_2
P_7	C_3, C_4, C_5, C_6
P_8	C_5, C_6
P_9	C_3, C_5
I_1	C_2, C_3, C_4
I_2	C_1, C_6
I_3	C_2, C_5
I_4	C_3, C_4, C_6
I_5	C_1
I_6	C_2, C_5

Le problème est d'attribuer le nombre maximal d'étudiants aux chambres tel que

- On n'attribue pas de chambre inacceptable à un étudiant.
- Une chambre double aura au plus deux étudiants, une chambre simple au plus un.
- Si deux étudiants sont attribués la même chambre, alors ils n'étudient pas le même sujet.

- Quel algorithme de graphe du cours utiliserez-vous pour résoudre ce problème?
- Dessinez le graphe correspondant à ce problème.

4. L'algorithme de Karp

On considère l'algorithme de Karp sur un graphe $G = (V, E)$ avec poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Les points a) et b) ci-dessous sont l'exercice qui se trouve au milieu de la page 199 du polycopié.

- Montrer que l'égalité suivante est vraie:

$$F_k(x) = \min_{u \in V \wedge (u,x) \in E} \{F_{k-1}(u) + w(u, x)\},$$

ou $F_k(\cdot)$ est (par définition) le poids du plus léger chemin de s à x de longueur k . (Voir le cours pour les notations en détail.)

- Montrer que les valeurs de F_k, F_{k-1}, \dots, F_0 peuvent être calculées en $O(|E| \cdot (k + 1))$ opérations.
- Ecrire explicitement (en pseudo-code) l'algorithme de Karp.