



PROJET DE SEMESTRE

Spectral graph theory and expander graphs

Magda Sofia ECHEVARRIA COELHO

Professeur :

Amin SHOKROLLAHI

Assistante :

Ghid MAATOUK

Automne 2012

Résumé

Au 18ème siècle, Leonhard Euler s'intéressa au problème des sept ponts de Königsberg connu pour être à l'origine de la théorie des graphes. Le problème consistait à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg. Euler fut le premier à donner un traitement mathématique à ce problème et ce fut ainsi que naquit la théorie des graphes. Ce travail traitera de la théorie spectrale des graphes qui permet de donner beaucoup d'informations sur les graphes. On parlera notamment des matrices d'adjacence et Laplacienne d'un graphe et de l'utilité de leur spectre. Par ailleurs on parlera d'un type de graphe avec des propriétés intéressantes qui sont les graphes expandeurs.

Table des matières

1	Le Laplacien	2
1.1	Définitions de base	2
1.2	Réflexion sur le laplacien	3
1.3	Isopérimétrie et λ_2	4
1.4	Le graphe complet K_n	6
1.5	L'étoile S_n	7
1.6	L'Hypercube	7
2	Matrice d'adjacence	12
2.1	Matrice d'adjacence du graphe complet : A_{K_n}	13
2.2	Matrice d'adjacence de l'hypercube : A_{H_d}	14
2.3	Matrice d'adjacence de l'étoile : A_{S_n}	14
3	Graphes expandeurs	16
3.1	Approximations du graphe complet	16
3.2	Le carré d'un graphe	16
3.3	Approximation du graphe des arêtes	18
3.4	L'entière construction	19
4	Le produit "Zig-Zag"	21
4.1	L'itération	21
4.2	Intuition	22
4.3	L'application rotation	22
4.4	Le produit tensoriel	23
4.5	Analyse du produit Zig-Zag	24
5	Conclusion	28
	Références	29

1 Le Laplacien

Le Laplacien est une matrice liée à un graphe, dont les propriétés spectrales sont très utiles. Par exemple nous allons voir que les valeurs propres du Laplacien nous donnent des informations sur le graphe (par exemple s'il est connexe ou pas). Avant cela donnons quelques définitions.

1.1 Définitions de base

1.1 Définition (Matrice d'adjacence). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors sa matrice d'adjacence est définie par :

$$A_G(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (u, v) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.2 Définition (Matrice Laplacienne et forme quadratique). Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors sa matrice laplacienne est définie par :

$$L_G = D_G - A_G$$

où D_G est une matrice diagonale avec les degrés de chaque sommet sur la diagonale. De plus, on peut montrer que la forme quadratique du Laplacien est donnée par :

$$\mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} = \sum_{(u,v) \in E} (\mathbf{x}(u) - \mathbf{x}(v))^2.$$

1.3 Remarque. Posons $G_{u,v}$ le graphe avec uniquement une arête entre u et v (il peut y avoir pleins d'autres sommets). Alors la matrice Laplacienne de $G_{u,v}$ sera de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

à l'intersection des sommets u et v et avec des zéros partout ailleurs. On peut donc écrire

$$L_G = \sum_{(u,v) \in E} (e_u - e_v)(e_u - e_v)^T = \sum_{(u,v) \in E} L_{G_{u,v}}.$$

1.4 Définition (Quotient de Rayleigh). Le quotient de Rayleigh d'un vecteur \mathbf{x} par rapport à une matrice M est défini par :

$$\frac{\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

1.5 Rappel. Rappelons qu'étant donné une matrice M $n \times n$ et λ une valeur propre de M alors on dit que $\psi \in \mathbb{R}^n, (\psi \neq 0)$, est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si

$$M\psi = \lambda\psi.$$

1.6 Théorème. Soit M une matrice symétrique et \mathbf{x} un vecteur qui minimise le Rayleigh quotient par rapport à M . Alors \mathbf{x} est un vecteur propre de M pour la valeur propre égale au Rayleigh quotient en \mathbf{x} . De plus, cette valeur propre est la plus grande.

Démonstration. On suppose le théorème spectral acquis. Tout d'abord numérotons chaque valeur propre de M de la manière suivante : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit $\{\psi_i\}_i$ la base orthonormée formée de vecteurs propres. Alors pour tout vecteur \mathbf{x} on a :

$$\mathbf{x} = \sum_i \psi_i^T \mathbf{x} \psi_i.$$

Comme la multiplication de \mathbf{x} par un scalaire ne change pas le quotient de Rayleigh, on peut supposer que \mathbf{x} est un vecteur unitaire, donc

$$\sum_i (\psi_i^T \mathbf{x})^2 = 1.$$

Calculons maintenant le quotient de Rayleigh par rapport à \mathbf{x} .

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} &= \frac{(\sum_i \psi_i^T \mathbf{x} \psi_i)^T M (\sum_j \psi_j^T \mathbf{x} \psi_j)}{1} \\ &= \frac{(\sum_i \psi_i \mathbf{x} \psi_i)^T (\sum_j (\psi_j^T \mathbf{x}) \lambda_j \psi_j)}{1} \\ &= \sum_{i,j} (\psi_i^T \mathbf{x}) (\psi_j^T \mathbf{x}) \lambda_j \psi_i^T \psi_j \\ &= \sum_i (\psi_i^T \mathbf{x})^2 \lambda_i \\ &\leq \lambda_n \sum_i (\psi_i^T \mathbf{x})^2 \\ &= \lambda_n. \end{aligned}$$

Donc le quotient de Rayleigh est borné par la plus grande valeur propre de M . On sait que le vecteur propre pour la valeur propre λ_n est ψ_n . Il reste à montrer que seuls les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_n peuvent avoir un si grand quotient de Rayleigh. En effet, L'inégalité ci-dessus est stricte si et seulement si $\lambda_i = \lambda_n$ pour tout i tel que $\psi_i^T \mathbf{x} \neq 0$. Ce qui est le cas si et seulement si \mathbf{x} est dans le span des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_n . \square

1.2 Réflexion sur le laplacien

La forme quadratique du laplacien étant une somme de carrés, elle n'est jamais négative. On remarque que si \mathbf{x} est un vecteur constant, cette forme est nulle. Par conséquent la plus petite valeur propre de Laplacien est zéro. Nous allons maintenant voir que si la deuxième valeur propre du Laplacien est positive alors on sait que le graphe est connexe.

1.7 Lemme. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice laplacienne. Alors,

$$\lambda_2 > 0 \iff G \text{ est connexe.}$$

Démonstration. \implies : Montrons la contraposée. Supposons G non-connexe. Alors on peut séparer G en deux sous-graphes, G_1 et G_2 , qui ne sont pas reliés l'un à l'autre. En énumérant les sommets d'une façon adéquate on obtient :

$$L_G = \begin{pmatrix} L_{G_1} & 0 \\ 0 & L_{G_2} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $L_G = D_G - A_G$. Si on prend la première ligne on aura comme premier nombre le degré du premier sommet puis un -1 à chaque fois qu'une arête relie le premier sommet à un autre sommet. Donc si on fait la somme de ses nombres on obtient zéro. Ce phénomène se produit pour chaque ligne et chaque colonne. Donc si on multiplie la matrice avec le vecteur $\mathbf{1}$ on obtient zéro. Or pour la matrice si-dessus, on peut soit multiplier par le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ soit par le vecteur $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$. Dans les deux cas on obtient $\mathbf{0}$. Par conséquent, il existe deux vecteurs propres pour la valeur propre 0 qui sont orthogonaux. Donc $\lambda_2 = 0$. Ainsi si $\lambda_2 > 0$ le graphe est connexe.

\Leftarrow : Supposons maintenant que G est connexe. Soit \mathbf{x} un vecteur propre de L_G pour la valeur propre 0. Comme $L_G \mathbf{x} = \mathbf{0}$ on a

$$\mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} = \sum_{(u,v) \in E} (\mathbf{x}(u) - \mathbf{x}(v))^2 = 0.$$

Ainsi pour chaque paire de sommets (u, v) reliés par une arête on a $\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}(v)$. Or comme le graphe est connexe chaque sommet u et v sont reliés par un chemin. Donc par induction on a que $\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}(v)$ pour tout sommet u et v . Donc \mathbf{x} doit être un vecteur constant. Par conséquent, l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 ce qui implique que $\lambda_2 > 0$. \square

1.3 Isopérimétrie et λ_2

Nous allons voir que la deuxième plus petite valeur propre du Laplacien est intimement liée au problème de la division d'un graphe en deux sans enlever trop d'arêtes.

1.8 Définition (Frontière). Soit S un sous-ensemble des sommets d'un graphe. La frontière de S est l'ensemble des arêtes qui relient un sommet de S au reste du graphe. On définit :

$$\partial(S) := \{(u, v) \in E : u \in S, v \notin S\}.$$

1.9 Définition (Rapport isopérimétrique). Soit S un sous-ensemble des sommets d'un graphe. On s'intéresse au rapport entre sa frontière et sa taille. On définit :

$$\theta(S) := \frac{|\partial(S)|}{|S|}$$

que l'on nomme le rapport isopérimétrique.

1.10 Définition (Nombre isopérimétrique). Soit G un graphe. On définit le nombre isopérimétrique par le minimum des rapports isopérimétriques de tous les ensemble d'au plus $\frac{n}{2}$ sommets :

$$\theta_G := \min_{|S| \leq n/2} \theta(S).$$

1.11 Théorème. Soit $G = (V, E)$. Pour tout sous-ensemble $S \subset V$ on a :

$$\theta(S) \geq \lambda_2(1 - s)$$

où $s = |S|/|V|$.

Démonstration. Comme

$$\lambda_2 = \min_{\mathbf{x}: \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 0} \frac{\mathbf{x}^T L_G \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}},$$

pour chaque \mathbf{x} non nul orthogonal à $\mathbf{1}$ on sait que

$$\mathbf{x} L_G \mathbf{x} \geq \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

En prenant le vecteur caractéristique de S , on obtient

$$\chi_S^T L_G \chi_S = \sum_{(u,v) \in E} (\chi_S(u) - \chi_S(v))^2 = |\partial(S)|.$$

Par contre χ_S n'est pas orthogonal à $\mathbf{1}$. Pour y remédier on utilise

$$\mathbf{x} = \chi_S - s \cdot \mathbf{1}.$$

On a $\mathbf{x}^T \mathbf{1} = 0$ et

$$\mathbf{x} L_G \mathbf{x} = \sum_{(u,v) \in E} ((\chi_S(u) - s) - (\chi_S(v) - s))^2 = |\partial(S)|.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{x} &= (\chi_S - s\mathbf{1})^T (\chi_S - s\mathbf{1}) = |S|(1-s)^2 + (|V| - |S|)s^2 = \\ &= |S|(1 - 2s + s^2) + |V|s^2 - |S|s^2 = |S| - 2|S|s + |V| \frac{|S|^2}{|V|^2} = \\ &= |S| - 2|S|s + |S|s = |S| - |S|s = |S|(1-s). \end{aligned}$$

Ainsi grâce à ce résultat on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} L_G \mathbf{x} \geq \lambda_2 \mathbf{x}^T \mathbf{x} &\implies |\partial(S)| \geq \lambda_2 |S|(1-s) \\ &\implies \frac{|\partial(S)|}{|S|} \geq \lambda_2 (1-s) \\ &\implies \theta(S) \geq \lambda_2 (1-s). \end{aligned}$$

□

1.12 Corollaire. Soit S un sous-ensemble de $\{0, 1\}^d$ de taille maximale $2^d - 1$. Alors

$$|\partial(S)| \geq |S|.$$

Démonstration. Par le théorème 1.11 on sait que

$$\frac{|\partial(S)|}{|S|} \geq \lambda_2 \left(1 - \frac{|S|}{|V|}\right)$$

où $V = 0, 1^d$ ici. Or pour l'hypercube on a $\lambda_2 = 2$. De plus $|S| \leq 2^d - 1$. On a donc

$$\frac{|\partial(S)|}{|S|} \geq 2 \left(1 - \frac{2^d - 1}{2^d}\right) = 2(1 - 1/2) = 1.$$

Ainsi, $|\partial(S)| \geq |S|$. □

Nous allons maintenant analyser le spectre de trois différents types de graphes.

1.4 Le graphe complet K_n

1.13 Définition (Graphe complet). K_n est le graphe complet sur n sommets dont l'ensemble des arêtes est donné par $\{(u, v) : u \neq v\}$.

1.14 Lemme. Le laplacien de K_n a la valeur propre 0 de multiplicité 1 et n de multiplicité $n - 1$.

Démonstration. Tout d'abord, on se rappelle que la première valeur propre est toujours nulle et de multiplicité 1, si le graphe est connexe, ce qui est le cas. Calculons les autres valeurs propres. Prenons un vecteur \mathbf{v} orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$. Alors on a

$$\sum_u v(u) = 0.$$

Sans pertes de généralités calculons la première composante du produit $L_{K_n} \mathbf{v}$. On a

$$\begin{aligned} (L_{K_n} \mathbf{v})(1) &= \sum_{u \geq 2} (\mathbf{v}(1) - \mathbf{v}(u)) \\ &= (n-1)\mathbf{v}(1) - \sum_{u=2}^n \mathbf{v}(u) \\ &= n\mathbf{v}(1) - \underbrace{\left(\mathbf{v}(1) + \sum_{v=2}^n \mathbf{v}(u) \right)}_{=0} \\ &= n\mathbf{v}(1). \end{aligned}$$

Comme le choix de la composante est arbitraire on obtient $L_{K_n} \mathbf{v} = n\mathbf{v}$. Pour une meilleure compréhension, regardons bien les choses. K_n est un graphe dont chaque sommet est relié à tous les autres. Ainsi chaque sommet est de degré $n - 1$. Par conséquent :

$$L_{K_n} = D_{K_n} - A_{K_n} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Si on multiplie L_{K_n} par un vecteur tel que $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ on a

$$\begin{aligned} L_{K_n} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \cdots - \mathbf{v}_n \\ -\mathbf{v}_2 - (n-1)\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \cdots - \mathbf{v}_n \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \cdots - \mathbf{v}_{n-1} - (n-1)\mathbf{v}_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi n'importe quel vecteur orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ est un vecteur propre pour la valeur propre n . Donc n est de multiplicité $n - 1$. □

1.5 L'étoile S_n

1.15 Définition (Graphe en étoile). S_n est l'étoile à n sommets dont l'ensemble des arêtes est donné par $\{(1, v) : 2 \leq v \leq n\}$.

1.16 Lemme. Soit $G = (V, E)$ un graphe et v, w des sommets de degré 1 tous deux liés à un même sommet z . Alors le vecteur

$$\psi(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u = v \\ -1 & \text{si } u = w \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un vecteur propre du Laplacien de G pour la valeur propre 1.

Démonstration. Voir [7]. □

1.17 Lemme. L'étoile S_n a la valeur propre 0 avec multiplicité 1, 1 avec multiplicité $n - 2$ et n avec multiplicité 1.

Démonstration. On sait que le Laplacien a la valeur propre 0 de multiplicité 1. En appliquant le lemme 1.16 aux sommets i et $i + 1$ pour $2 \leq i \leq n$ on trouve $n - 2$ vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 1. Pour calculer la dernière valeur propre on utilise la trace de la matrice L_{S_n} . Nous savons que cette somme vaut $2n - 1$ qui est la somme des degrés de chaque sommet ainsi que la somme des valeurs propres. En effet, en faisant un changement de base on trouve une matrice diagonale avec les valeurs propres et on sait que la trace de deux matrices semblables sont les mêmes. Ainsi on a

$$2n - 2 = 0 + 1(n - 2) + t \Rightarrow t = n.$$

Ainsi la dernière valeur propre est n de multiplicité 1. □

1.6 L'Hypercube

1.18 Définition (Hypercube). L'hypercube est le graphe $\mathcal{H}_n = (\{0, 1\}^n, E)$ avec $E = \{(x, y) : d_H(x, y) = 1\}$ où $d_H(x, y) = \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \neq y_i\}$.

1.19 Définition (Produit de deux graphes). Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes. Alors le produit $G \times H$ est le graphe avec pour ensemble de sommets $V \times W$ et pour ensemble des arêtes

$$\begin{aligned} & \left((v, w), (\hat{v}, w) \right) \quad \text{où } (v, \hat{v}) \in E \\ & \left((v, w), (u, \hat{w}) \right) \quad \text{où } (w, \hat{w}) \in F. \end{aligned}$$

1.20 Théorème. Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes. Posons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice laplacienne de G dont les vecteurs propres associés sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Posons également μ_1, \dots, μ_m les vecteurs propres de la matrice laplacienne de H dont les vecteurs propres associés sont β_1, \dots, β_m . Alors pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, G \times H$ a un vecteur propre $\gamma_{i,j}$ associé à la valeur propre $\lambda_i + \mu_j$ tel que

$$\gamma_{i,j}(v, w) = \alpha_i(v)\beta_j(w).$$

Démonstration. Soit α un vecteur propre de L_G pour la valeur propre λ et β un vecteur propre de L_H pour la valeur propre μ . Pour voir que γ est un vecteur propre de $L_{G \times H}$ pour la valeur propre $\lambda + \mu$ on fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (L_{G \times H} \gamma)(u, v) &= \sum_{(\hat{u}, v): (u, \hat{u}) \in E} (\gamma(u, v) - \gamma(\hat{u}, v)) + \sum_{(u, \hat{v}): (v, \hat{v}) \in F} (\gamma(u, v) - \gamma(u, \hat{v})) = \\ &= \sum_{(\hat{u}, v): (u, \hat{u}) \in E} (\alpha(u)\beta(v) - \alpha(\hat{u})\beta(v)) + \sum_{(u, \hat{v}): (v, \hat{v}) \in F} (\alpha(u)\beta(v) - \alpha(u)\beta(\hat{v})) = \\ &= \sum_{(\hat{u}, v): (u, \hat{u}) \in E} \beta(v)(\alpha(u) - \alpha(\hat{u})) + \sum_{(u, \hat{v}): (v, \hat{v}) \in F} \alpha(u)(\beta(v) - \beta(\hat{v})) = \\ &= \beta(v)\lambda\alpha(u) + \alpha(u)\mu\beta(v) = (\lambda + \mu)\alpha(u)\beta(v) = (\lambda + \mu)\gamma. \end{aligned}$$

On a donc bien que γ est un vecteur propre de $L_{G \times H}$ pour la valeur propre $\lambda + \mu$. \square

Calcul de $G \times H_{d-1}$. Soient $G \times H_{d-1} = (V_{G \times H_{d-1}}, E_{G \times H_{d-1}})$ et $H_d = (V_{H_d}, E_{H_d})$ deux graphes. On souhaite montrer que $G \times H_{d-1} = H_d$. Posons

$$\phi : V_{H_{d-1} \times G} \longrightarrow V_{H_d}$$

$$\left((u_1, \dots, u_{d-1}), u' \right) \mapsto (u_1, \dots, u_{d-1}, u')$$

et montrons que c'est une bijection. On voit clairement que

$$\{0, 1\}^{d-1} \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^d.$$

Par conséquent, $V_{H_{d-1} \times G}$ et V_{H_d} ont la même dimension. Il suffit donc de montrer que ϕ est injective pour obtenir la bijection. Soient $u, v \in V_{H_{d-1} \times G}$ tels que $\phi(u) = \phi(v)$. Alors $(u_1, \dots, u_{d-1}, u') = (v_1, \dots, v_{d-1}, v')$ et donc $u_1 = v_1, \dots, u_{d-1} = v_{d-1}, u' = v'$ ce qui implique que $\left((u_1, \dots, u_{d-1}), u' \right) = \left((v_1, \dots, v_{d-1}), v' \right)$ et par conséquent $u = v$. Ainsi ϕ est injective. Montrons maintenant que

$$(u, v) \in E_{H_{d-1} \times G} \iff \left(\phi(u), \phi(v) \right) \in E_{H_d}.$$

\implies : Soit $(u, v) \in E_{H_{d-1} \times G}$. Par définition du produit d'un graphe on a que les types d'arêtes de $E_{H_{d-1} \times G}$ sont les suivantes :

1. $\left(((u_1, \dots, u_{d-1}), 0), ((v_1, \dots, v_{d-1}), 0) \right) \in E_{H_{d-1} \times G}$
 $\forall (u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \in \{0, 1\}^{d-1}$ tels que
 $\left((u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \right) \in E_{H_{d-1}}$
2. $\left(((u_1, \dots, u_{d-1}), 1), ((v_1, \dots, v_{d-1}), 1) \right) \in E_{H_{d-1} \times G}$
 $\forall (u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \in \{0, 1\}^{d-1}$ tels que
 $\left((u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \right) \in E_{H_{d-1}}$

$$3. \left(((u_1, \dots, u_{d-1}), 1), ((u_1, \dots, u_{d-1}), 0) \right) \in E_{H_{d-1} \times G}$$

$$\forall (u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \in \{0, 1\}^{d-1} \text{ tels que}$$

$$\left((u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \right) \in E_{H_{d-1}}$$

Ainsi dans le premier cas

$$\left(\phi(u), \phi(v) \right) = \left((u_1, \dots, u_{d-1}, 0), (v_1, \dots, v_{d-1}, 0) \right) \in E_{H_d}.$$

En effet, ces deux sommets ne diffèrent que d'une seule coordonnée car

$\left((u_1, \dots, u_{d-1}), (v_1, \dots, v_{d-1}) \right) \in E_{H_{d-1}}$ ne diffèrent que d'une seule coordonnée par définition des arêtes dans l'hypercube à $d - 1$ dimensions. Dans le deuxième cas on a :

$$\left(\phi(u), \phi(v) \right) = \left((u_1, \dots, u_{d-1}, 1), (v_1, \dots, v_{d-1}, 1) \right) \in E_{H_d}$$

par le même argument que précédemment. Dans le troisième cas on a :

$$\left(\phi(u), \phi(v) \right) = \left((u_1, \dots, u_{d-1}, 1), (u_1, \dots, u_{d-1}, 0) \right) \in E_{H_d}$$

car on voit clairement que ces deux sommets ne diffèrent que d'une coordonnée.

\Leftarrow :

Soit $\left(\phi(u), \phi(v) \right) \in E_{H_d}$ avec $u, v \in V_{H_d}$. Alors $(u_1, \dots, u_{d-1}, u')$ et

$(v_1, \dots, v_{d-1}, v')$ ne diffèrent que sur une coordonnée par définition des arêtes de l'hypercube à d dimensions. Comme $u, v \in V_{H_d}$ on a que $u', v' \in \{0, 1\}$. Si u, v diffèrent sur l'une des $d - 1$ premières composantes et que la dernière est soit 0 soit 1, on aura des arêtes de type 1 et 2. Si u, v ne diffèrent que sur la dernière composante alors on a une arête de type 3. Ainsi

$$\left(\phi(u), \phi(v) \right) \in E_{H_d} \Rightarrow (u, v) \in E_{H_{d-1} \times G}.$$

Calcul du Laplacien de H_d . Une fois ce résultat obtenu nous pouvons calculer le Laplacien de H_d . Pour ce faire commençons par $G = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\}) = H_1$ qui est le graphe de l'hypercube à dimension 1. On a :

$$L_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique donne $\lambda(\lambda - 2) = 0$. On obtient $(1, -1)$ comme vecteur propre de la valeur propre 2. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que $G \times H_{d-1} = H_d$. Autrement dit $H_d = G \times G \times \dots \times G = G^d$. Ainsi chaque fois qu'on prend un G on a le choix entre deux valeurs propres : 0 ou 2. Par le théorème précédent, on sait que les vecteurs propres de H_d seront

une somme des valeurs propres de G . On aura donc des valeurs propres de la forme suivante :

$$2k \text{ avec multiplicité } \binom{d}{k}, \forall 0 \leq k \leq d.$$

La multiplicité vient du fait qu'on choisit k fois parmi d le chiffre 2. En utilisant le théorème précédent on peut aussi voir que les vecteurs propres de H_d sont donnés par les fonctions :

$$\psi_a(b) = (-1)^{a^T b}$$

où $a \in \{0, 1\}^d$, et nous considérons les sommets b comme des vecteurs de longueur d formés de 0 et de 1. La valeur propre pour laquelle ψ_a est un vecteur propre est deux fois le nombre de uns dans a .

Pour démontrer cette formule calculons d'abord les vecteurs propres de H_1 .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\lambda = 0 \rightarrow \psi_{H_1}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2 \rightarrow \psi_{H_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On constate que ces vecteurs sont bien donnés par la formule

$$\psi_a(b) = (-1)^{a^T b}$$

où $a \in \{0, 1\}$ et $b \in \{0, 1\}$ également. On obtient bien

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} (-1)^{0 \cdot 0} \\ (-1)^{0 \cdot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_{H_1}^0 \text{ et}$$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} (-1)^{1 \cdot 0} \\ (-1)^{1 \cdot 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \psi_{H_1}^2.$$

Supposons maintenant que la formule est vraie pour l'hypercube à $d - 1$ dimensions, c'est-à-dire qu'elle donne bien les vecteurs propres de H_{d-1} et montrons qu'elle reste vraie pour H_d . Par hypothèse, les vecteurs propres de H_{d-1} sont donnés par :

$$\psi_a(b) = (-1)^{a^T b}$$

où $a \in \{0, 1\}^d$ et les b énumèrent tous les vecteurs dans $\{0, 1\}^{d-1}$. Comme $H_d = H_{d-1} \times G$, on a par le théorème 1.20 des vecteurs propres de formes suivantes :

$$\psi_{0,a} = \begin{pmatrix} \psi_a \cdot \psi_{H_1}^0(1) \\ \psi_a \cdot \psi_{H_1}^0(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_a \end{pmatrix}$$

et

$$\psi_{1,a} = \begin{pmatrix} \psi_a \cdot \psi_{H_1}^2(1) \\ \psi_a \cdot \psi_{H_1}^2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_a \end{pmatrix}.$$

Or par hypothèse on a :

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{a^T b_1} \\ \vdots \\ (-1)^{a^T b_{2^{d-1}}} \\ (-1)^{a^T b_1} \\ \vdots \\ (-1)^{a^T b_{2^{d-1}}} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{a^T b_1} \\ \vdots \\ (-1)^{a^T b_{2^{d-1}}} \\ -(-1)^{a^T b_1} \\ \vdots \\ -(-1)^{a^T b_{2^{d-1}}} \end{pmatrix}.$$

De plus, la formule nous donne :

$$\psi_{0|a} = \begin{pmatrix} (-1)^{(0|a)^T(0|b_1)} \\ \vdots \\ (-1)^{(0|a)^T(0|b_{2^{d-1}})} \\ (-1)^{(0|a)^T(1|b_1)} \\ \vdots \\ (-1)^{(0|a)^T(1|b_{2^{d-1}})} \end{pmatrix} \text{ et } \psi_{1|a} = \begin{pmatrix} (-1)^{(1|a)^T(0|b_1)} \\ \vdots \\ (-1)^{(1|a)^T(0|b_{2^{d-1}})} \\ -(-1)^{(1|a)^T(1|b_1)} \\ \vdots \\ -(-1)^{(1|a)^T(1|b_{2^{d-1}})} \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned} (-1)^{(0|a)^T(0|b)} &= (-1)^{\begin{pmatrix} 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}} = (-1)^{0+a^T b} = (-1)^{a^T b}, \\ (-1)^{(0|a)^T(1|b)} &= (-1)^{\begin{pmatrix} 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}} = (-1)^{0+a^T b} = (-1)^{a^T b}, \\ (-1)^{(1|a)^T(0|b)} &= (-1)^{\begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}} = (-1)^{0+a^T b} = (-1)^{a^T b} \\ (-1)^{(1|a)^T(1|b)} &= (-1)^{\begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}} = (-1)^{1+a^T b} = (-1)(-1)^{a^T b}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien

$$\psi_{0|a} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_a \end{pmatrix} \text{ et } \psi_{1|a} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_a \end{pmatrix}.$$

La formule donne donc bien les vecteurs propres pour l'hypercube à d dimensions.

2 Matrice d'adjacence

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G (possiblement pondéré). A agit comme un opérateur sur un vecteur $x \in R^V$ par

$$(Ax)(u) = \sum_{(u,v) \in E} w(u,v)x(v).$$

Soient μ_1, \dots, μ_n les valeurs propres de A que l'on ordonne de la façon suivante :

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n.$$

La raison de cette convention est qu'ainsi la i -ème valeur propre du laplacien λ_i correspond à μ_i . Si on prend un graphe d -régulier alors $D = d \cdot I_d$. De plus,

$$L = dI - A$$

et donc

$$\lambda_i = d - \mu_i.$$

On observe donc que la plus grande valeur propre de A est $\mu_1 = d - \lambda_1 = d$, car $\lambda_1 = 0$, pour un graphe d -régulier.

De plus, le vecteur propre associé à la valeur propre d sera le vecteur constant car

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, chaque ligne de A contient d uns car chaque sommet en touche d autres. Examinons maintenant μ_1 pour un graphe quelconque.

2.1 Lemme. Soit G un graphe et soient d_{max} le degré maximal d'un sommet de G et d_{ave} la moyenne des degrés d'un sommet de G . Alors

$$d_{ave} \leq \mu_1 \leq d_{max}.$$

Démonstration. On a vu que si \mathbf{x} maximise le quotient de Rayleigh alors ce dernier est égale à la plus grande valeur propre de la matrice considérée. Ainsi on a :

$$\mu_1 = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq \frac{\mathbf{1}^T A \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{1}} = \frac{\sum_{i,j} A_{i,j}}{n} = \frac{\sum_i d(i)}{n} = d_{ave}$$

où n est le nombre de sommets de G . Donc $\mu_1 \geq d_{ave}$.

Prenons maintenant ϕ_1 un vecteur propre pour μ_1 . Soit $v \in V$ le sommet où il atteint sa valeur maximale : $\phi_1(v) \geq \phi_1(u) \forall u \in V$, et supposons, sans pertes de généralité, que $\phi_1(v) \neq 0$. Alors

$$\mu_1 = \frac{(A\phi_1)(v)}{\phi_1(v)} = \frac{\sum_u \phi_1(u)}{\phi_1(v)} = \sum_{u,v} \frac{\phi_1(u)}{\phi_1(v)} \leq \sum_{u,v} 1 \leq d(v) \leq d_{max}.$$

On a donc bien

$$d_{ave} \leq \mu_1 \leq d_{max}.$$

□

2.2 Lemme. Soit G un graphe. Si G est connexe et $\mu_1 = d_{\max}$ alors G est d_{\max} -régulier.

Démonstration. Par l'équation de la preuve du lemme 2.1, on a l'égalité $\mu_1 = d_{\max}$ uniquement si $d(v) = d_{\max}$ et $\phi_1(u) = \phi_1(v)$ pour tout $(u, v) \in E$. On peut appliquer cet argument de voisin en voisin et comme le graphe est connexe on a finalement que $\phi_1(z) = \phi_1(v)$ et $d(z) = d_{\max}$ pour tout $z \in V$. \square

Analysons maintenant les matrices d'adjacences des types de graphes vus au chapitre précédent.

2.1 Matrice d'adjacence du graphe complet : A_{K_n} .

– $n = 2$:

$$A_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs propres 1 et -1 avec les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivement.

– $n = 3$:

$$A_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs propres 2 et -1 avec les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

– Pour $n \in \mathbb{N}, n > 2$, on remarque que la matrice d'adjacence est de la forme :

$$A_{K_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

On aura donc la valeur propre associée au vecteur propre constant. Prenons maintenant un vecteur ϕ orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ constant. Alors, sans pertes de généralités calculons la première composante de $A \cdot \phi$. On a :

$$(A\phi)(1) = \sum_{i=2}^n \phi(i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \phi(i)}_{=0} - \phi(1) = -\phi(1)$$

car $\phi \perp \mathbf{1}$. Par conséquent tout vecteur orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1 . Par conséquent la valeur propre -1 est de multiplicité $n - 1$. Ainsi, par le théorème du rang, on a que la valeur propre $n - 1$ est de multiplicité 1.

2.3 Remarque. On a vu que pour le cas d'un graphe d -régulier on a

$$\lambda_i = d - \mu_i$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice Laplacienne et les μ_i celles de la matrice d'adjacence. Dans le cas de K_n on a donc directement

$$d = n - 1 \text{ et } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = n.$$

On obtient donc bien $\mu_1 = n - 1$ et $\mu_2 = -1$.

Utilisons cette remarque pour traiter le cas de l'hypercube qui est un graphe d -régulier.

2.2 Matrice d'adjacence de l'hypercube : A_{H_d}

Pour la matrice Laplacienne on avait les valeurs propres $2 \cdot k$ avec multiplicité $\binom{d}{k}$ pour tout $0 \leq k \leq d$. On obtient donc les valeurs propres

$$\mu = 2k, \forall 0 \leq k \leq d, \text{ de multiplicité } \binom{d}{k}.$$

Les vecteurs propres restent les mêmes.

2.3 Matrice d'adjacence de l'étoile : A_{S_n} .

- $n = 2$:

$$A_{S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs propres 1 et -1 avec les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivement.

- $n = 3$:

$$A_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs propres 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ avec les vecteurs propres correspondants $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}, n > 2$, on remarque que la matrice d'adjacence est de la forme :

$$A_{S_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

On aura donc la valeur propre $\sqrt{n-1}$ avec son vecteur propre associé $\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $\sqrt{n-1}$ est donc de multiplicité 1. On a également la valeur

propre $-\sqrt{n-1}$ avec son vecteur propre associé $\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour finir on a par le théorème du rang que la valeur propre 0 est de multiplicité $n-2$.

2.4 Théorème (Courant Fischer). *Soit A une matrice symétrique avec $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ ses valeurs propres. Alors*

$$\mu_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{\mathbf{x} \in S} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \min_{\substack{T \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{\mathbf{x} \in T} \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}.$$

Démonstration. Voir [5].

□

3 Graphes expandeurs

Un graphe expandeur est avant tout un graphe très connecté. Ce type de graphe est très utile dans divers domaines dû à ses multiples propriétés. Nous allons en étudier quelques unes.

3.1 Approximations du graphe complet

On peut définir les expandeurs de diverses manières. Une d'entre elles est la suivante.

3.1 Définition (Expandeur). Un graphe expandeur est un graphe d -régulier dont les valeurs propres de la matrice d'adjacence satisfont

$$|\alpha_i| \leq \epsilon d, \quad (1)$$

pour $i \geq 2$ et ϵ petit.

Nous allons voir qu'un graphe qui satisfait cette propriété est une bonne approximation d'un graphe complet où on dit qu'un graphe H est une ϵ -approximation d'un graphe G si

$$(1 - \epsilon)H \preceq G \preceq (1 + \epsilon)H,$$

où on dit que $G \preceq H$ si pour tout \mathbf{x}

$$\mathbf{x}^T L_H \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T L_G \mathbf{x}.$$

On souhaite donc montrer qu'un graphe expandeur est une bonne approximation d'un graphe complet. Soit donc G un graphe satisfaisant la propriété (1). Comme les valeurs propres du Laplacien vérifient $\lambda_i = d - \alpha_i$, toutes les valeurs propres non nulles de L_G sont entre $(1 - \epsilon)d$ et $(1 + \epsilon)d$. Ceci signifie que pour tout vecteur orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ on a

$$(1 - \epsilon)d\mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T L_G \mathbf{x} \leq (1 + \epsilon)d\mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Regardons maintenant ce qui se passe avec le graphe complet K_n . On sait que tout vecteur \mathbf{x} orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ satisfait

$$\mathbf{x}^T L_{K_n} \mathbf{x} = n\mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Ainsi si on pose $H = \frac{d}{n}K_n$ alors $\mathbf{x}^T L_H \mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \mathbf{x}$. Par conséquent G est une ϵ -approximation de H .

3.2 Le carré d'un graphe

Soit G un graphe. On définit G^2 comme étant le graphe dans lequel les sommets u et v sont connectés s'ils sont à distance 2 dans G . On peut donc faire un lien entre les matrices d'adjacence de G et de G^2 . Soit donc A la matrice d'adjacence de G . Alors $A^2(u, v)$ est le nombre de chemins de longueur 2 entre u et v dans G , et $A^2(u, v)$ est toujours d . Cependant on ne veut pas de boucles, par conséquent on définit la matrice de A^2 de la manière suivante :

$$A_{G^2} = A_G^2 - d\mathbb{I}_n.$$

3.2 Lemme. Soit G un graphe d -régulier avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres du Laplacien. Alors G^2 est un graphe $d(d-1)$ -régulier dont les valeurs propres du Laplacien sont

$$2d\lambda_i - \lambda_i^2.$$

Démonstration. Premièrement traitons la plus grande valeur propre du Laplacien. Comme A_G^2 est semi-définie positive, la plus petite valeur propre de A_{G^2} est au moins $-d$ et donc la plus grande valeur propre du Laplacien de G^2 est au plus

$$d(d-1) + d = d^2.$$

Pour les autres valeurs propre on a donc :

$$\begin{aligned} \lambda_i \text{ est une valeur propre de } L_G &\implies \\ d - \lambda_i \text{ est une valeur propre de } A_G &\implies \\ (d - \lambda_i)^2 - d \text{ est une valeur propre de } A_{G^2} &\implies \\ d(d-1) - (d - \lambda_i)^2 + d \text{ est une valeur propre de } L_{G^2} &\implies \end{aligned}$$

et

$$d(d-1) - (d - \lambda_i)^2 + d = d^2 - (d - \lambda_i)^2 = 2d\lambda_i - \lambda_i^2.$$

□

3.3 Définition (Graphe des arêtes). Soit $G = (V, E)$ un graphe. On peut lui associer un nouveau graphe H que l'on nomme graphe des arêtes. Un tel graphe est obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets dans H si et seulement si les arêtes correspondantes dans G ont une extrémité en commun.

3.4 Remarque. Soient G un graphe d -régulier sur n sommets et H son graphe des arêtes. Comme G a $dn/2$ arêtes, H a $dn/2$ sommets. On peut indexer les sommets de H par (u, v) où u et v sont des sommets connectés dans G . Ainsi chaque sommet de H est de degré $2(d-1)$: $d-1$ arêtes pour u et $d-1$ pour v . On remarque que si on prend un sommet $w \in V$ alors chaque sommet de la forme (w, v) de H avec $v \in V$ est connecté (par définition du graphe des arêtes). Ainsi H contient une d -clique pour chaque $v \in V$ et chacun de ces sommets est contenu dans 2 cliques.

3.5 Lemme. Soit G un graphe d -régulier et H son graphe des arêtes. Alors le spectre du Laplacien de H a le même spectre que celui du Laplacien de G , excepté que H a $dn/2 - n$ valeurs propres de plus de valeur $2d$.

Démonstration. Voir [8].

□

On souhaite avoir des graphes qui soient les meilleurs expandeurs possibles. Pour cela on définit une quantité qui permet de savoir si un graphe est un bon expandeur ou non.

3.6 Définition (Rapport spectral). Le rapport spectral d'un graphe est la quantité suivante :

$$r(G) := \min \left(\frac{\lambda_2}{d}, \frac{2d - \lambda_n}{d} \right).$$

Les graphes avec un grand rapport spectral sont de meilleurs expandeurs. Un ϵ -expandeur a un rapport spectral d'au moins $1 - \epsilon$.

3.7 Proposition. *Soit G un graphe d -régulier pour $d \geq 6$ et soit H soit graphe des arêtes. Alors*

$$r(H) = \frac{\lambda_2(G)}{2(d-1)} \geq r(G)/2.$$

Démonstration. Comme G est d -régulier, $\lambda_2(G) \leq d$ et $\lambda_{\max}(H) = 2d$. Donc, $\lambda_{\max}(H) = 2d$ et $\lambda_2(H) = \lambda_2(G) \leq d$. Par conséquent, le terme dans la définition du rapport spectral qui correspond à la plus grande valeur propre de H satisfait

$$\frac{2(2d-2) - \lambda_{\max}(H)}{2d-2} = \frac{2(2d-2) - 2d}{2d-2} = 1 - \frac{2}{d} \geq 2/3,$$

car $d \geq 6$. D'un autre côté on a

$$\frac{\lambda_2(H)}{2d-2} \leq \frac{d}{2d-2} \leq 3/5.$$

Par conséquent,

$$\min\left(\frac{\lambda_2(H)}{2d-2}, \frac{2(2d-2) - \lambda_{\max}(H)}{2d-2}\right) = \frac{\lambda_2(H)}{2d-2}.$$

□

3.3 Approximation du graphe des arêtes

On sait maintenant comment approximer les graphes complets : en utilisant des expandeurs. Comme les graphes des arêtes sont des sommes de graphes complets, étant donné que ce sont des ensembles de cliques, on va les approximer par des sommes d'expandeurs. Pour ce faire on remplace chaque clique par un expandeur sur d sommets.

Soit G un graphe d -régulier et soit Z un graphe sur d sommets. On définit le graphe

$$G \textcircled{\mathbb{L}} Z$$

comme étant le graphe obtenu en remplaçant chaque d -clique du graphe des arêtes de G par une copie Z .

3.8 Lemme. *Soient G un graphe d -régulier, H soit graphe des arêtes et Z un graphe z -régulier ϵ -expandeur. Alors*

$$r(G \textcircled{\mathbb{L}} Z) \geq \frac{1-\epsilon}{2} r(G).$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 3.7. On a

$$\lambda_2(G \textcircled{\mathbb{L}} Z) \geq (1-\epsilon) \frac{k\lambda_2(G)}{d},$$

et

$$\lambda_{\max}(G \textcircled{\mathbb{L}} Z) \leq (1+\epsilon)2k.$$

Donc,

$$\min(\lambda_2(G \mathbb{L} Z), 2(2k) - \lambda_{\max}(G \mathbb{L} Z)) \geq \min((1 - \epsilon)2k) = (1 - \epsilon) \frac{k\lambda_2(G)}{d},$$

car $\lambda_2(G) \leq d$. Donc

$$r(G \mathbb{L} Z) \geq \frac{1}{2k}(1 - \epsilon)kr(G) = \frac{1 - \epsilon}{2}r(G).$$

□

3.4 L'entière construction

On présente maintenant une construction donnée dans le cours de Spielman (voir [8]), qui n'est pas aussi bonne que la construction Zig-Zag que l'on verra dans le chapitre suivant, mais qui est plus simple.

En se rappelant que les valeurs propres du carré d'un graphe G sont de la forme $2d\lambda_i - \lambda_i$, on remarque que le rapport spectral de G^2 est un peu moins que 2 fois celui de G . Ainsi G^2 est un meilleur expandeur. En se rappelant de ce résultat on commence par prendre un graphe Z z -régulier sur d sommets où on pose

$$d := (2z(2z - 1))^2 - 2z(2z - 1),$$

tel que soit un ϵ -expandeur pour un ϵ petit. Le graphe initial de la construction doit être un petit expandeur d -régulier que l'on pose G_0 . On pose également $\beta > 0$ le rapport spectral de G_0 et on suppose que β est petit. Ensuite on construit $G_0 \mathbb{L} Z$. Le degré de ce graphe est $2z$ et son rapport spectral est un peu moins que de $\beta/2$. Or on souhaite que le rapport spectral augmente pour que le graphe obtenu soit un meilleur expandeur. Ainsi on met le graphe obtenu au carré. On obtient

$$(G_0 \mathbb{L} Z)^2$$

qui est un graphe à peu près $4z^2$ -régulier et de rapport spectral un peu moins que β . Mais on veut un rapport spectral un supérieur à β . Alors on met à nouveau au carré le nouveau graphe obtenu. On pose

$$G_1 = \left((G_0 \mathbb{L} Z)^2 \right)^2.$$

G_1 est alors un graphe à peu près $16z^4$ -régulier et son rapport spectral est un peu moins que 2β . On obtient ainsi un meilleur expandeur. De plus, comme G_1 est un carré, sa plus grande valeur propre pour le Laplacien est très proche de son degré. On continue l'itération en posant :

$$G_{i+1} = \left((G_i \mathbb{L} Z)^2 \right)^2.$$

Pour que cette construction itérative fonctionne il est nécessaire que Z soit un graphe de degré z tel que le nombre de sommets est égal au degré de G ce qui est exactement

$$(2z(2z - 1))^2 - 2z(2z - 1).$$

Pour ce qui l'en est du rapport spectral si on suppose que $\beta \geq 4/5$ que le rapport spectral de G_i est également plus grand ou égal à $4/5$ et que Z est un $1/6$ -expandeur. Alors on a par le lemme 3.8 que

$$r(G_i \mathbb{L} Z) \geq (1 - \epsilon)(4/5)/2 = 1/3.$$

Alors $G_i \mathbb{L} Z$ est un $2/3$ -expandeur. L'analyse des carrés de graphes nous dit que G_{i+1} est un $(2/3)^4$ -expandeur. Donc

$$r(G_{i+1}) \geq 1 - (2/3)^4 = 65/81 > 4/5.$$

Ainsi chaque G_i a un rapport spectral d'au moins $4/5$ alors que son degré augmente à chaque fois. On crée ainsi une famille d'expandeurs qui grandit en taille et pour augmenter leur rapport spectral il suffit de prendre leur carré quelques fois.

4 Le produit "Zig-Zag"

Dans ce dernier chapitre on va voir une construction de graphes expandeurs. On construit une famille d'expandeurs de façon plus méticuleuse qu'au chapitre précédent. Dans cette construction, on va non seulement mettre les graphes au carré mais également ajouter le produit tensoriel ainsi que le produit Zig-Zag. Au final on aboutira à une famille de graphes expandeurs qui grandit en taille mais garde un degré fixe.

4.1 Remarque. Dans ce chapitre on pose $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe.

4.2 Définition. Un (N, D, λ) -graphe est un graphe D -régulier sur N sommets et dont la deuxième plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence normalisée est au plus λ (en valeur absolue).

On définit deux opérations semblables à celles du chapitre précédent.

4.3 Définition (Le carré). Si G est un (N, D, λ) -graphe alors G^2 est un (N, D^2, λ^2) -graphe.

4.4 Définition (Le produit "Zig-Zag"). Soit G_1 un (N_1, D_1, λ_1) -graphe et soit G_2 un (D_1, D_2, λ_2) -graphe. On définit alors un nouveau produit de graphe nommé le produit Zig-Zag et noté $G_1 \otimes G_2$. Un tel produit donne un $(N_1 \cdot D_1, D_2^2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2)$ -graphe.

On prend donc un petit et un grand graphe et on produit un graphe qui hérite en quelques sortes de la taille du grand graphe et du degré du petit. On crée ainsi de grands graphes qui ont une borne sur le degré.

4.1 L'itération

Soit H un $(D^4, D, 1/5)$ -graphe qui est le point de départ de notre construction. On définit la suite de graphes de la manière suivante :

- $G_1 = H^2$,
- $G_{i+1} = G_i^2 \otimes H$.

On construit ainsi une famille infinie d'expandeurs.

4.5 Théorème. Pour chaque i , G_i est un $(N_i, D^2, 2/5)$ -graphe avec $N_i = D^{4i}$.

Cette construction n'est pourtant pas encore aussi efficace que nous le voudrions. En effet, pour coder le voisinage de G_i il est nécessaire d'un temps polynomial en N_i alors qu'on souhaiterait que ce soit en $\log(N_i)$. On va supposer que chaque arête de notre graphe D -régulier est D -coloriable et on attribue une couleur à chacune des arêtes qui part d'un sommet. Pour chaque couleur $i \in [D]$ et pour chaque sommet v on pose $v[i]$ le voisin de v qui est relié à ce dernier par une arête de couleur i . On donne ainsi une définition plus formelle du produit Zig-Zag.

4.6 Définition. Soient G_1 un graphe D_1 -régulier sur $[N_1]$ sommets et G_2 un graphe D_2 -régulier sur $[D_1]$ sommets. Alors $G_1 \otimes G_2$ est un graphe D_2^2 -régulier sur $[N_1] \times [D_1]$ sommets défini de la manière suivante :

Pour tout sommet $v \in [N_1], k \in [D_1], i, j \in [D_2]$, l'arête (i, j) relie le sommet (v, k) au sommet $(v[k[i]], k[i][j])$.

4.7 Remarque. La taille du petit graphe G_2 est le degré du grand graphe G_1 . Par conséquent, un sommet de $G_1 \otimes G_2$ a une première composante qui est un sommet du grand graphe et une deuxième composante qui peut être vue à la fois comme sommet du petit graphe et comme un indice d'arête du grand graphe.

Voici comment on lie les sommets du graphe obtenu.

1. $(v, k) \rightarrow (v, k[i])$ - Un pas dans le petit graphe allant de k à $k[i]$.
2. $(v, k[i]) \rightarrow (v[k[i]], k[i])$ - Un pas dans le grand graphe.
3. $(v[k[i]], k[i]) \rightarrow (v[k[i]], k[i][j])$ - Un dernier pas dans le petit graphe allant de $k[i]$ à $k[i][j]$.

4.2 Intuition

On souhaite qu'un pas aléatoire dans notre expandeur augmente l'entropie de la distribution des sommets. Intuitivement on a les deux cas de figure suivants :

- Si la distribution de la deuxième composante k n'est pas très uniforme alors le premier pas fonctionne et la distribution devient plus uniforme. Le deuxième pas est une simple permutation et le dernier pas est un pas aléatoire sur un graphe régulier, il ne peut donc pas rendre la distribution moins uniforme.
- Si la distribution de la deuxième composante k est proche de l'uniformité alors le premier pas engendre une perte d'entropie. Cependant, le deuxième pas devient à ce moment là un vrai pas aléatoire dans le grand expandeur G_2 . Ainsi l'entropie de la première composante v augmente. Or comme le deuxième pas est une permutation des sommets de $G_1 \otimes G_2$ donc si l'entropie augmente sur la deuxième composante alors elle diminue sur la première. On se retrouve ainsi dans le premier cas de figure et donc le dernier pas qui est un pas aléatoire dans le petit graphe G_2 rend la distribution plus uniforme.

4.3 L'application rotation

Soit G un graphe D -régulier non orienté sur N sommets. On indexe chaque arête partant d'un sommet $v \in [N]$ de 1 à D arbitrairement mais de manière fixe. Alors pour $v, w \in [N]$ and $i \in [D]$ on peut dire que w est le i -ème voisin de v . Or lorsqu'on fait un pas on souhaite garder une trace de l'arête parcourue pour aller de v à w . On le formalise de la manière suivante :

4.8 Définition (L'application rotation). Pour un graphe D -régulier non orienté G l'application rotation $Rot_G : [N] \times [D] \rightarrow [N] \times [D]$ est définie par

$$Rot_G(v, i) = (w, j)$$

si le i -ème voisin de v est w et que v est le j -ème voisin de w .

A partir de maintenant nous verrons tous les graphes comme étant déterminé par leur application de rotation. De plus, nous dirons qu'une famille de graphes \mathcal{G} est explicite si pour tout $G \in \mathcal{G}$, Rot_G est codé en temps $\text{poly}(\log N)$, où N est le nombre de sommets de G . C'est-à-dire que les graphes de \mathcal{G} sont indexés par certains paramètres et qu'il y a un algorithme qui code efficacement Rot_G pour tout $G \in \mathcal{G}$ quand ces paramètres sont donnés en input. La notation "poly()"

désigne une fonction polynomiale dans les variables données. Notre construction sera itérative et sera basée sur une suite de compositions d'opérations, en construisant des nouveaux graphes à partir de graphes donnés. La définition de ces compositions va nous montrer comment l'application rotation du nouveau graphe obtenu à chaque nouvelle itération peut être codée en utilisant des "oracles accès" pour chaque application rotation des différents graphes. Étant donné le temps de codage d'un tel calcul ainsi que le nombre d'appels-oracles qu'il a fallu, il est plus aisé de calculer le temps total requis pour une telle construction récursive.

4.9 Définition. La matrice d'adjacence normalisée M de G est la matrice d'adjacence de G divisée par D . En termes d'application rotation on a :

$$M_{u,v} = \frac{1}{D} \cdot |\{(i,j) \in [D]^2 : Rot_G(u,i) = (v,j)\}|.$$

4.10 Définition. $\lambda(G)$ représente la deuxième plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence normalisée de G . Alors :

$$\lambda(G) = \max_{\alpha \perp \mathbf{1}_N} \frac{|\langle \alpha, M\alpha \rangle|}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \max_{\alpha \perp \mathbf{1}_N} \frac{\|M\alpha\|}{\|\alpha\|}.$$

4.4 Le produit tensoriel

Soit G_1 un multigraphe D_1 -régulier sur $[N_1]$ sommets et soit G_2 un multigraphe D_2 -régulier sur $[N_2]$ sommets. On définit le produit tensoriel $G_1 \otimes G_2$ comme étant un multigraphe $D_1 \cdot D_2$ -régulier sur $[N_1] \times [N_2]$ sommets donné par

$$Rot_{G_1 \otimes G_2}((v,w), (i,j)) = ((v',w'), (i',j')),$$

où $(v',i') = Rot_{G_1}(v,i)$ et $(w',j') = Rot_{G_2}(w,j)$. On définit également le produit tensoriel de deux vecteurs. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{N_1}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{N_2}$, alors $\alpha \otimes \beta \in \mathbb{R}^{N_1 \cdot N_2}$ est un vecteur dont la (i,j) -ème composante est $\alpha_i \cdot \beta_j$. En ce qui concerne les matrices si on prend une matrice $N_1 \times N_1$, A et une matrice $N_2 \times N_2$ alors $A \otimes B$ est l'unique matrice $N_1 N_2 \times N_1 N_2$ qui satisfait l'équation

$$(A \otimes B)(\alpha \otimes \beta) = (A\alpha) \otimes (B\beta)$$

pour tout α, β .

4.11 Proposition. Si G_1 est un (N_1, D_1, λ_1) -graphe et G_2 un (N_2, D_2, λ_2) -graphe alors $G_1 \otimes G_2$ est un $(N_1 \cdot N_2, D_1 \cdot D_2, \max(\lambda_1, \lambda_2))$ -graphe. De plus, $Rot_{G_1 \otimes G_2}$ est codé en temps $poly(\log N_1 N_2, \log D_1 D_2)$ avec un appel-oracle pour Rot_{G_1} et un appel-oracle pour Rot_{G_2} .

Démonstration. La matrice d'adjacence normalisée de $G_1 \otimes G_2$ est le produit tensoriel des matrices d'adjacences normalisées de G_1 et G_2 . La plus grande valeur propre est $1 \cdot 1$ et la deuxième plus grande valeur propre est soit $1 \cdot \lambda_2$ soit $\lambda_1 \cdot 1$. \square

On donne maintenant une définition du produit Zig-Zag en fonction des applications rotation :

4.12 Définition. Soit G_1 un graphe D_1 -régulier sur $[N_1]$ sommets avec application rotation Rot_{G_1} et soit G_2 un graphe D_2 -régulier sur $[D_1]$ sommets avec application de rotation Rot_{G_2} . Alors $G_1 \otimes G_2$ est un graphe D_2^2 -régulier sur $[N_1] \times [N_2]$ sommet dont l'application de rotation est la suivante :

$$Rot_{G_1 \otimes G_2}((v, k), (i, j)) :$$

1. Soit $(k', i') = Rot_{G_2}(k, i)$,
2. Soit $(w, l') = Rot_{G_1}(v, k')$,
3. Soit $(l, j') = Rot_{G_2}(l', j)$,
4. On obtient finalement $((w, l), (j', i'))$.

La caractéristique importante de ce produit est que $G_1 \otimes G_2$ est un bon expandeur si G_1 et G_2 le sont également.

4.13 Théorème. Soit G_1 un (N_1, D_1, λ_1) -graphe et soit G_2 un (D_1, D_2, λ_2) -graphe, alors $G_1 \otimes G_2$ est un $(N_1 \cdot D_1, D_2^2, f(\lambda_1, \lambda_2))$ -graphe où $f(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2$ et $f(\lambda_1, \lambda_2) \leq 1$ si $\lambda_1, \lambda_2 \leq 1$. De plus, $Rot_{G_1 \otimes G_2}$ peut être codé en temps $poly(\log N_1, \log D_1, \log D_2)$ avec un appel-oracle pour Rot_{G_1} et deux appels-oracles pour Rot_{G_2} .

Avant de prouver ce théorème on va montrer comment on peut l'utiliser pour construire une famille infinie d'expandeurs avec degré constant. On va construire une nouvelle itération mais en ajoutant le produit tensoriel. Ceci permet de réduire la grandeur de la récursion et ainsi faire exécuter la construction en temps polylogarithmique.

Soit H un (D^8, D, λ) -graphe pour un certain D et un certain λ . Pour tout $t \geq 1$, on va définir un $(D^{8^t}, D^2, \lambda_t)$ -graphe G_t . On pose $G_1 = H^2$ et $G_2 = H \otimes H$. Pour $t > 2$, G_t est récursivement défini par :

$$G_t = \left(G_{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil} \otimes G_{\lfloor \frac{t-2}{2} \rfloor} \right)^2 \otimes H.$$

4.14 Théorème. Pour tout $t \geq 0$, G_t est un $(D^{8^t}, D^2, \lambda_t)$ -graphe avec $\lambda_t = \lambda + O(\lambda^2)$. De plus, Rot_{G_t} est codé en temps $poly(t, \log D)$ avec $poly(t)$ appels-oracles pour Rot_H .

Démonstration. Une simple induction montre que le nombre de sommets de G_t est D^{8^t} et qu'il est de degré D^2 . En ce qui concerne les valeurs propres on pose $\mu_k = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$. Alors on a que $\mu_t \leq \max\{\mu_{t-1}, \mu_{t-1}^2 + \lambda + \lambda^2\}$ pour tout $t \geq 2$. Après récursion faite on obtient $\mu_t \leq \lambda + O(\lambda^2)$ pour tout t . Pour l'efficacité on remarque que le pas de récursion est au plus $\log_2 t$ et que l'évaluation de l'application de rotation pour G_t requière 4 évaluations de l'application de rotation pour de petits graphes. Donc le nombre total d'appels à des appels-oracles est au plus $4^{\log_2 t} = t^2$. \square

4.5 Analyse du produit Zig-Zag

On va donner ici une preuve du théorème 4.13. Rappelons l'intuition derrière le produit Zig-Zag. Nous souhaiterions montrer que pour toute distribution non-uniforme π sur les sommets de $G_1 \otimes G_2$, en faisant un pas aléatoire dans le

graphe $G_1 \otimes G_2$ abouti à une distribution plus uniforme. Par l'intuition faite au début du chapitre on considère deux cas extrêmes : un premier où on commence par une distribution très peu uniforme et un deuxième où la distribution initiale est proche de l'uniformité. On va voir que ces deux cas sont en fait les seuls. On se restreint donc à ces deux cas en décomposant chaque autre vecteur en une combinaison linéaire de ces deux.

Démonstration du théorème 4.13 Soit M la matrice d'adjacence normalisée de $G_1 \otimes G_2$. D'après la définition 4.10 on doit montrer que pour tout vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^{N_1 \cdot D_1}$ orthogonal au vecteur $\mathbf{1}$ (i.e. $\alpha \perp \mathbf{1}_{N_1 D_1}$), $|\langle M\alpha, \alpha \rangle|$ est plus petit que $\langle \alpha, \alpha \rangle$ par un facteur $f(\lambda_1, \lambda_2)$. Par intuition, α devrait être considéré comme la composante non-uniforme de la distribution de probabilité π , i.e. $\pi = u_{N_1 D_1} + \alpha$, où $u_{N_1 D_1} = \mathbf{1}_{N_1 D_1} / N_1 D_1$ est la distribution uniforme sur $[N_1 D_1]$. On montre donc que π devient plus uniforme après un pas aléatoire dans $G_1 \otimes G_2$.

Pour tout vecteur $v \in [N_1]$, on définit $\alpha_v \in \mathbb{R}^{D_1}$ par $(\alpha_v)_k = \alpha_{vk}$. De plus, on définit une application linéaire $C : \mathbb{R}^{N_1 \cdot D_1} \rightarrow \mathbb{R}^{D_1}$ par $(C\alpha)_v = \sum_{k=1}^{D_1} \alpha_{vk}$. Par définition, $\alpha = \sum_v e_v \otimes \alpha_v$, où e_v est le v -ème vecteur de la base standard de \mathbb{R}^{N_1} . Par l'algèbre linéaire de base on sait que chaque α_v peut être décomposé de manière unique en $\alpha_v = \alpha_v^{\parallel} + \alpha_v^{\perp}$ où α_v^{\parallel} est parallèle au vecteur $\mathbf{1}_{D_1}$ et α_v^{\perp} est orthogonal au vecteur $\mathbf{1}_{D_1}$. On obtient donc la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_v e_v \otimes \alpha_v \\ &= \sum_v e_v \otimes \alpha_v^{\parallel} + \sum_v e_v \otimes \alpha_v^{\perp} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{\parallel} + \alpha^{\perp}. \end{aligned}$$

Cette décomposition correspond au deux cas de notre intuition. α^{\parallel} correspond à la distribution de probabilité sur les sommets de $G_1 \otimes G_2$ tel que la distribution de probabilité conditionnelle sur l'ensemble des sommets est uniforme. α^{\perp} correspond à la distribution telle que la distribution conditionnelle sur l'ensemble des sommets n'est pas uniforme. Une autre façon d'associer α^{\parallel} à notre intuition est de remarquer que $\alpha^{\parallel} = C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1} / D_1$. Comme α et α^{\perp} sont orthogonaux à $\mathbf{1}_{N_1 D_1}$, alors α^{\parallel} est également orthogonal à $\mathbf{1}_{N_1 D_1}$ et donc $C\alpha$ est orthogonal à $\mathbf{1}_{N_1}$.

Pour analyser comment M agit sur ces deux vecteurs, on relie M aux deux matrice d'adjacence normalisées de G_1 et G_2 , que l'on note A et B respectivement. Tout d'abord on décompose M en un produit de trois matrices qui correspondent au trois pas de la définition des arêtes de $G_1 \otimes G_2$. Posons \tilde{B} la matrice d'adjacence normalisée du graphe sur $[N_1] \times [D_1]$ sommets où on connecte les sommets dans chaque ensemble en accord avec les arêtes de G_2 . \tilde{B} est en relation avec B par $\tilde{B} = \mathbf{I}_{N_1} \otimes B$, où \mathbf{I}_{N_1} est la matrice identité $N_1 \times N_1$. Posons \tilde{A} la matrice de permutation correspondant à Rot_{G_1} . Par définition de $G_1 \otimes G_2$ on a $M = \tilde{B} \tilde{A} \tilde{B}$. On remarque que \tilde{A} et \tilde{B} sont symétriques due au fait que G_1 et G_2 ne sont pas orientés.

Rappelons que nous voulons borner $|\langle M\alpha, \alpha \rangle| / \langle \alpha, \alpha \rangle$. Par la symétrie de \tilde{B} ,

$$\langle M\alpha, \alpha \rangle = \langle \tilde{B} \tilde{A} \tilde{B} \alpha, \alpha \rangle = \langle \tilde{A} \tilde{B} \alpha, \tilde{B} \alpha \rangle. \quad (2)$$

Maintenant notons que $\tilde{B}\alpha^\perp = \alpha^\perp$, car $\alpha^\parallel = C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1}/D_1$, $\tilde{B} = \mathbf{I}_{N_1} \otimes B$, et $B\mathbf{1}_{D_1} = \mathbf{1}_{D_1}$. Ceci correspond au fait que si la distribution conditionnelle dans chaque ensemble de sommets est uniforme alors faire un pas aléatoire dans G_2 ne change rien. D'où $\tilde{B}\alpha = \tilde{B}(\alpha^\parallel + \alpha^\perp) = \alpha^\parallel + \tilde{B}\alpha^\perp$. En substituant ceci dans (2) on obtient :

$$\langle M\alpha, \alpha \rangle = \left\langle \tilde{A}(\alpha^\parallel + \tilde{B}\alpha^\perp), \alpha^\parallel + \tilde{B}\alpha^\perp \right\rangle. \quad (3)$$

On a également, en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$|\langle M\alpha, \alpha \rangle| \leq \left\langle \tilde{A}\alpha^\parallel, \alpha^\parallel \right\rangle + 2\|\alpha^\parallel\| \cdot \|\tilde{B}\alpha^\perp\| + \|\tilde{B}\alpha^\perp\|^2. \quad (4)$$

Maintenant on applique les propriétés d'expansion de G_1 et G_2 pour borner chacun de ces termes. On commence par $\|\tilde{B}\alpha^\perp\|$, qui correspond à l'intuition que quand la distribution conditionnelle des ensembles de sommets qui ne sont pas uniformes. Ils deviennent plus uniformes lorsque l'on fait un pas aléatoire dans G_2 .

4.15 Affirmation. $\|\tilde{B}\alpha^\perp\| \leq \lambda_2\|\alpha^\perp\|$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \tilde{B}\alpha^\perp &= \tilde{B} \left(\sum_v e_v \otimes \alpha_v^\perp \right) \\ &= \sum_v e_v \otimes B\alpha_v^\perp. \end{aligned}$$

Par l'expansion de G_2 , $\|B\alpha_v^\perp\| \leq \lambda_2\|\alpha_v^\perp\|$ pour tout v . D'où le résultat. \square

Ensuite on borne $\left\langle \tilde{A}\alpha^\parallel, \alpha^\parallel \right\rangle$ qui correspond par intuition au cas où quand la distribution conditionnelle dans chaque ensemble de sommets est uniforme, le saut entre les ensembles de sommets rend la distribution marginale des ensembles de sommets plus uniformes par eux-mêmes.

4.16 Affirmation. $\left\langle \tilde{A}\alpha^\parallel, \alpha^\parallel \right\rangle \leq \lambda_1 \cdot \langle \alpha^\parallel, \alpha^\parallel \rangle$.

Démonstration. Pour prouver cette affirmation il est d'abord nécessaire de faire un lien entre \tilde{A} et A . Rappelons que quand k est distribué uniformément, $Rot_{G_1}(v, k)$ donne une paire (w, l) où w est pris uniformément parmi les voisins de v . De manière similaire, si $e_v \in \mathbb{R}^{N_1}$ est le v -ème vecteur de la base standard alors Ae_v donne la distribution uniforme sur les voisins de v . On le voit de manière similaire dans la formule $C\tilde{A}(e_v \otimes \mathbf{1}_{D_1}/D_1) = Ae_v$ pour tout v . Puisque les e_v forment une base cette formule s'étend à tout vecteur $\beta \in \mathbb{R}^{N_1}$: $C\tilde{A}(\beta \otimes \mathbf{1}_{D_1}/D_1) = A\beta$. En appliquant la formule à $\alpha^\parallel = C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1}/D_1$, on a $C\tilde{A}(\alpha^\parallel) = AC\alpha$. D'où :

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{A}\alpha^\parallel, \alpha^\parallel \right\rangle &= \left\langle \tilde{A}\alpha^\parallel, C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1} \right\rangle / D_1 \\ &= \left\langle C\tilde{A}\alpha^\parallel, C\alpha \right\rangle / D_1 \\ &= \langle AC\alpha, C\alpha \rangle / D_1. \end{aligned}$$

Sachant que $C\alpha$ est orthogonal à $\mathbf{1}_{D_1}$, on peut appliquer l'expansion de G_1 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}\alpha^{\parallel}, \alpha^{\parallel} \rangle &= \lambda_1 \cdot \langle C\alpha, C\alpha \rangle / D_1 \\ &= \lambda_1 \cdot \langle C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1}, C\alpha \otimes \mathbf{1}_{D_1} \rangle / D_1^2 \\ &= \alpha_1 \cdot \langle \alpha^{\parallel}, \alpha^{\parallel} \rangle. \end{aligned}$$

□

En substituant les bornes des affirmations 4.15 et 4.16 dans (4) on a :

$$|\langle M\alpha, \alpha \rangle| \leq \lambda_1 \cdot \|\alpha^{\parallel}\|^2 + 2\lambda_2 \cdot \|\alpha^{\parallel}\| \cdot \|\alpha^{\perp}\| + \lambda_2^2 \cdot \|\alpha^{\perp}\|^2. \quad (5)$$

Si on pose $p = \|\alpha^{\parallel}\|/\|\alpha\|$ et $q = \|\alpha^{\perp}\|/\|\alpha\|$, alors $p^2 + q^2 = 1$, et l'expression ci-dessus deviens :

$$\frac{|\langle M\alpha, \alpha \rangle|}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \leq \lambda_1 \cdot p^2 + 2\lambda_2 \cdot pq + \lambda_2^2 \cdot q^2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Ceci montre que l'on peut prendre $f(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2^2$. Il reste à montrer que si $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ alors $f(\lambda_1, \lambda_2) < 1$. On considère les deux cas suivants :

1. Si $\|\alpha^{\perp}\| \leq \frac{1-\lambda_1}{3\lambda_2} \cdot \|\alpha\|$ alors on a

$$\begin{aligned} |\langle M\alpha, \alpha \rangle| &\leq \lambda_1 \cdot \|\alpha\|^2 + 2\lambda_2 \cdot \frac{1-\lambda_1}{3\lambda_2} \cdot \|\alpha\|^2 + \lambda_2^2 \cdot \left(\frac{1-\lambda_1}{3\lambda_2}\right)^2 \|\alpha\|^2 \\ &< \left(1 - \frac{1-\lambda_1}{9}\right) \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

2. Si $\|\alpha^{\perp}\| > \frac{1-\lambda_1}{3\lambda_2} \cdot \|\alpha\|$ on a, en utilisant le fait que $\tilde{B}\alpha^{\perp}$ est orthogonal à α^{\parallel} (en effet $\langle \tilde{B}\alpha^{\perp}, \alpha^{\parallel} \rangle = \langle \alpha^{\perp}, \tilde{B}\alpha^{\parallel} \rangle = \langle \alpha^{\perp}, \alpha^{\parallel} \rangle = 0$) :

$$\begin{aligned} |\langle M\alpha, \alpha \rangle| &= \left| \langle \tilde{A}(\alpha^{\parallel} + \tilde{B}\alpha^{\perp}), \alpha^{\parallel} + \tilde{B}\alpha^{\perp} \rangle \right| \\ &\leq \|\alpha^{\parallel} + \tilde{B}\alpha^{\perp}\|^2 = \|\alpha^{\parallel}\|^2 + \|\tilde{B}\alpha^{\perp}\|^2 \leq \|\alpha\|^2 - \|\alpha^{\perp}\|^2 + \lambda_2^2 \cdot \|\alpha^{\perp}\|^2 \\ &\leq \|\alpha\|^2 - (1 - \lambda_2^2) \cdot \left(\frac{1-\lambda_1}{3\lambda_2}\right) \cdot \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$f(\lambda_1, \lambda_2) \leq 1 - \min \left\{ \frac{1-\lambda_1}{9}, \frac{(1-\lambda_1)^2 \cdot (1-\lambda_2^2)}{9\lambda_2^2} \right\} < 1.$$

5 Conclusion

Ce projet nous donne donc un aperçu de l'utilité du spectre d'un graphe. De plus, on a vu comment créer une famille de graphes expandeurs qui grandit en taille et en qualité, c'est-à-dire que le rapport spectral augmente et donne donc lieu à de meilleur expandeurs, tout en gardant un degré constant. Ce type de graphes a beaucoup de propriétés très utiles. La motivation initiale de la construction de tels graphes fut de construire des réseaux robustes. Ils ont cependant pleins d'autres utilités. On les retrouve par exemple dans les taux de convergence des chaînes de Markov et dans l'étude des algorithmes de Monte-Carlo. Par ailleurs, ils jouent un rôle dans le problème isopérimétrique. On les utilise également en informatique pour construire des familles de codes correcteurs d'erreur.

Références

- [1] Daniel A. Spielman : The Adjacency Matrix and the n Eigenvalue. Spectral graph theory, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect03-12.pdf>, 2012.
- [2] Avi Wigderson Omer Reingold, Salil Vadhan. Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders. In *Annals of Mathematics*, volume 155 of *Second Series*, pages pp. 157–187. Annals of Mathematics, november 2002.
- [3] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : Properties of expanders, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/2009/lect10-09.pdf>, 2009.
- [4] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : Algebraic constructions of graphs, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect15-12.pdf>, 2012.
- [5] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : Bounding eigenvalues, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect04-12.pdf>, 2012.
- [6] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : Introduction, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect01-12.pdf>, 2012.
- [7] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : The laplacien, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect02-12.pdf>, 2012.
- [8] Daniel A. Spielman. Spectral graph theory : The simplest construction of expanders, <http://www.cs.yale.edu/homes/spielman/561/lect16-12.pdf>, 2012.